

ALGORITMI E STRUTTURE DI DATI (II MODULO)
PROVA SCRITTA del 16/07/2018

Esercizio 1. Proprietà del Minimum Spanning Tree (MST) di un grafo pesato. Si consideri un grafo non diretto pesato connesso $(G=(V,E), c)$ (pesi positivi e tutti distinti). Sia $e=(u,v)$ in E tale che:
(i) $c(e) = \max\{c(e') \mid e' \in E\}$ AND ii) $G'=(V,E-\{e\})$ non è connesso.

Dire per ognuno dei seguenti fatti se è vero, falso oppure dipende da altri fattori (dare una breve ma chiara motivazione alla risposta).

- F1. Un arco di costo massimo non può mai far parte di un MST, quindi l'arco e non fa parte di alcun MST
- F2. L'arco e potrebbe far parte oppure no di cicli del grafo.
- F4. L'arco e non solo fa parte di qualsiasi MST ma anche di qualsiasi Spanning Tree del grafo.

Esercizio 2. Minimum Spanning Tree (MST) e Cammini di un grafo pesato. Si consideri un grafo non diretto pesato connesso $(G=(V,E), c)$ (pesi positivi e tutti distinti), ed un arco specifico $e=(u,v)$ e si valuti il seguente enunciato:

SE per gli estremi di e , u e v non esiste alcun cammino P : $u \rightarrow v$ fatto di tutti e soli archi di costo strettamente inferiore a $c(e)$ ALLORA l'arco e fa sicuramente parte di un MST di G .

Domande:

- L'enunciato è falso? Se SI, disegnare in modo chiaro un controesempio qui sotto.
- Se l'enunciato fosse vero, allora sarebbe possibile dare una dimostrazione che si basa sulla proprietà dei TAGLI? Se SI, definire con precisione su quale taglio applicare la proprietà.

Esercizio 3. Procedura UNION(A,B) con il metodo QUICK Union-Find basato sulla dimensione degli insiemi.

Si consideri la struttura dati **Quick-Find** su n elementi mediante il mantenimento di una foresta di alberi etichettati di altezza 1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una motivazione chiara e sintetica:

1. Partendo dalla situazione iniziale in cui si hanno n singleton, dopo una sequenza arbitraria di k operazioni ($k < n$) UNION(A,B), quale è il massimo (worst-case) numero di sottoinsiemi distinti che possono rimanere?
2. Dopo una sequenza arbitraria di $n^{2/3}$ operazioni UNION(A,B), quanto vale il numero massimo di cambiamenti di padre che può subire un fissato nodo (worst-case)? Scegliere una risposta dalle seguenti, facendo molta attenzione a su quale argomento è basata l'analisi ammortizzata del processo:
 - a) $O((\log n)^{2/3})$
 - b) $O(\log n)$
 - c) $\Theta(\sum_{i=1, \dots, n^{2/3}} i)$