

**ALGORITMI E STRUTTURE DI DATI (II MODULO)**  
**PROVA SCRITTA del 16/07/2018**

**Esercizio 1. Proprietà del Minimum Spanning Tree (MST) di un grafo pesato.** Si consideri un grafo non diretto pesato connesso  $(G=(V,E), c)$  (pesi positivi e tutti distinti). Sia  $e=(u,v)$  in  $E$  tale che:  
(i)  $c(e) = \max\{c(e') \mid e' \in E\}$  AND ii)  $G'=(V,E-\{e\})$  non è connesso.

Dire per ognuno dei seguenti fatti se è vero, falso oppure dipende da altri fattori (dare una breve ma chiara motivazione alla risposta).

- F1. Un arco di costo massimo non può mai far parte di un MST, quindi l'arco  $e$  non fa parte di alcun MST
- F2. L'arco  $e$  potrebbe far parte oppure no di cicli del grafo.
- F4. L'arco  $e$  non solo fa parte di qualsiasi MST ma anche di qualsiasi Spanning Tree del grafo.

**Esercizio 2. Minimum Spanning Tree (MST) e Cammini di un grafo pesato.** Si consideri un grafo non diretto pesato connesso  $(G=(V,E), c)$  (pesi positivi e tutti distinti), ed un arco specifico  $e=(u,v)$  e si valuti il seguente enunciato:

SE per gli estremi di  $e$ ,  $u$  e  $v$  non esiste alcun cammino  $P$ :  $u \rightarrow v$  fatto di tutti e soli archi di costo strettamente inferiore a  $c(e)$  ALLORA l'arco  $e$  fa sicuramente parte di un MST di  $G$ .

Domande:

- L'enunciato è falso? Se SI, disegnare in modo chiaro un controesempio qui sotto.

- Se l'enunciato fosse vero, allora sarebbe possibile dare una dimostrazione che si basa sulla proprietà dei TAGLI? Se SI, definire con precisione su quale taglio applicare la proprietà.

**Esercizio 3. Procedura UNION(A,B) con il metodo QUICK Union-Find basato sulla dimensione degli insiemi.**

Si consideri la struttura dati **Quick-Find** su  $n$  elementi mediante il mantenimento di una foresta di alberi etichettati di altezza 1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una motivazione chiara e sintetica:

1. Partendo dalla situazione iniziale in cui si hanno  $n$  singleton, dopo una sequenza arbitraria di  $k$  operazioni ( $k < n$ ) UNION(A,B), quale è il massimo (worst-case) numero di sottoinsiemi distinti che possono rimanere?
2. Dopo una sequenza arbitraria di  $n^{2/3}$  operazioni UNION(A,B), quanto vale il numero massimo di cambiamenti di padre che può subire un fissato nodo (worst-case)? Scegliere una risposta dalle seguenti, facendo molta attenzione a su quale argomento è basata l'analisi ammortizzata del processo:
  - a)  $O((\log n)^{2/3})$
  - b)  $O(\log n)$
  - c)  $\Theta(\sum_{i=1, \dots, n^{2/3}} i)$