NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Test del 17.12.2007

1) Calcolare la parte reale, la parte immaginaria, il modulo del seguente numero complesso e indicare a quale punto del piano complesso corrisponde

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{8!} \cdot \left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right)^{9!} .$$

2) Calcolare tutte le radici quadrate di

$$1 - i$$

nel campo complesso.

3) Determinare il carattere delle seguenti serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\frac{n}{2}}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\,.$$

4) Dopo avere indicato il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\log\left(\dfrac{4}{\pi}\arctan\bigl(\cos(x)\bigr)\right)}\,,$$

calcolarne la derivata.

5) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{|x|+1}}$$

e disegnarne un grafico qualitativo.

Soluzioni:

1) **:** Scriviamo $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ in forma trigonometrica:
Il modulo è
$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1\,,$$
mentre l'argomento φ soddisfa
$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}$$
perciò possiamo prendere $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Ora la formula di De Moivre implica
$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{8!} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{8!}\\ &= \cos\left(\frac{8!}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{8!}{6}\pi\right) = 1\end{aligned}$$
perché $\dfrac{8!}{6}\pi = 5!\cdot 7\cdot 8\cdot\pi$ è un moltiplo intero pari di π.

Similmente, il modulo di $\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$ è 1 e come argomento possiamo porre $\dfrac{5\pi}{6}$, perciò
$$\begin{aligned}\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{9!} &= \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^{9!}\\ &= \cos\left(9!\cdot\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(9!\cdot\frac{5\pi}{6}\right)\\ &= \cos\big(5!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 5\cdot\pi\big)+i\sin\big(5!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 5\cdot\pi\big)\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Risulta che la parte reale, la parte immaginaria ed il modulo del numero complesso
$$e^{-i\frac{\pi}{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{8!}\cdot\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{9!} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

sono rispettivamente $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, ed il punto corrispondente del piano complesso ha le coordinate $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) **:** Per calcolare le radici quadrate di $1-i$ nel campo complesso, cioè i numeri complessi z che soddisfano l'ugualità $z^2 = 1-i$, dobbiamo prima scrivere $1-i$ in forma trigonometrica:

$\left|1-i\right| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$,

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, perciò possiamo porre $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

ed otteniamo

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Ora, se $z = r\big(\cos\psi + i\sin\psi\big)$ e $z^2 = 1-i$, allora la formula di De Moivre implica

$$r^2\big(\cos(2\psi) + i\sin(2\psi)\big) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

cioè $r^2 = \sqrt{2}$ e

$$\begin{aligned} 2\psi &= \varphi + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ ossia} \\ \psi &= \frac{\varphi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{8} + k\pi \end{aligned}$$

per un k intero. Perciò le radici quadrate di $1-i$ nel campo complesso sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right)\right) \\ &= \sqrt[4]{2}\left(-\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ &= -z_1, \end{aligned}$$

poiché, "cos" e "sin" essendo funzioni periodiche con periodo 2π, per $k = 2$ riotteniamo z_1, poi per $k = 3$ riotteniamo z_2, e cosi via.

Rimarco. Possiamo andare anche oltre, calcolando esplicitamente

$$\cos\frac{\pi}{8}\,,\ \sin\frac{\pi}{8} \text{ e quindi } z_1\,,\ z_2 \ = -z_1\,.$$

Infatti, usando le formule trigonometriche

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\,, \qquad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

con $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, si ottengono

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\,,$$

cioè

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}}\,, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}}\,.$$

Risulta che le radici quadrate di $1-i$ nel campo complesso sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}} - i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,, \\ z_2 &= -\,z_1 \\ &= -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,. \end{aligned}$$

3) : Le due serie sono a termini positivi, perciò possiamo applicare alle ambedue il **criterio del rapporto** che afferma :

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è una serie tale che* $a_n > 0$ *per ogni* n *ed il limite* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *esiste, allora*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 &\implies \textit{la serie converge,}\\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 &\implies \textit{la serie diverge,}\\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 &\implies \textit{nulla si può concludere.}
\end{aligned}$$

Nel caso della serie con $a_n = \dfrac{n!}{n^{\frac{n}{2}}}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}}{\dfrac{n!}{n^{\frac{n}{2}}}} &= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= (n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\\
&= \sqrt{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\,.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = +\infty\,, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{1}{2}}\,,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} = (+\infty) \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = +\infty > 1\,.$$

Per il criterio del rapporto concludiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^{\frac{n}{2}}}$ diverge.

D'altra parte, nel caso della serie con $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} > 1 ,$$

perciò la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.

4) : Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\log\left(\dfrac{4}{\pi}\arctan\big(\cos(x)\big)\right)} ,$$

consiste da tutti i numeri reali x per quali

$$\arctan\big(\cos(x)\big) > 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x > 0$$

e

$$\frac{4}{\pi}\arctan\big(\cos(x)\big) \neq 1 \;\Leftrightarrow\; \arctan\big(\cos(x)\big) \neq \frac{\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; \cos x \neq 1 ,$$

cioè

$$0 < \cos x < 1 .$$

In altre parole, il dominio di f è l'unione di $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ con tutti i suoi traslati con moltipli interi pari di π :

$$\begin{aligned} ... \cup \left(-2\pi - \frac{\pi}{2}, -2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup ... \\ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) . \end{aligned}$$

La funzione f è derivabile quale composizione delle funzioni derivabili

$$\frac{1}{u}, \quad \log v , \quad \frac{4}{\pi} w , \quad \arctan t , \quad \cos x$$

e la derivata di f si calcola usando la regola della catena e le formule note

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\,,\ (\log v)' = \frac{1}{v}\,,\ \left(\frac{4}{\pi}\,w\right)' = \frac{4}{\pi}\,,$$

$$(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}\,,\ (\cos x)' = -\sin x\ :$$

$$\begin{aligned} f'(x) = &\ -\ \frac{1}{\log^2\left(\frac{4}{\pi}\arctan\big(\cos(x)\big)\right)}\cdot\frac{1}{\frac{4}{\pi}\arctan\big(\cos(x)\big)}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\frac{1}{1+\cos^2 x}\cdot\big(-\sin x\big) \\ = &\ \frac{\sin x}{\log^2\left(\frac{4}{\pi}\arctan\big(\cos(x)\big)\right)\cdot\arctan\big(\cos(x)\big)\cdot\big(1+\cos^2 x\big)}\,. \end{aligned}$$

5) : La funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{|x|+1}} = \sqrt{|x|-1}$ è definita per tutti i numeri reali x per quali $|x| \geq 1$ e questi sono $\big(-\infty,-1\big] \cup \big[1,+\infty\big)$.
Poiché f è pari, basta studiarla su $\big[1,+\infty\big)$.
Su questo intervallo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x-1}\,, \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0 \ \text{ per } \ x \in \big[1,+\infty\big)\,, \\ f'_+(1) &= \lim_{x\to 1+}\frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty \end{aligned}$$

x	1		$+\infty$
f'	$+\infty$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Così f è strettamente crescente su $\big[1,+\infty\big)$ ed ha tangente verticale in $x=1$.
Per la parità di f risulta che f è strettamente decrescente su $\big(-\infty,-1\big]$ ed ha tangente verticale in $x=-1$.
Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f.