Sulla continuità uniforma:

Un intervallo di numeri reali è un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$ tale che
$$I \ni x_1 \le x \le x_2 \in I \implies x \in I\,.$$
Per un intervallo I
$$a(I) = \inf_{x \in I} x \ \text{ (appartenente a } \mathbb{R} \text{ o uguale a } -\infty)$$
è l'estremità inferiore di I, mentre
$$b(I) = \sup_{x \in I} x \ \text{ (appartenente a } \mathbb{R} \text{ o uguale a } +\infty)$$
è l'estremità superiore. Si vede facilmente che I contiene
$$\big\{ x \in \mathbb{R}\,;\ a(I) < x < b(I) \big\}$$
ed è contenuto in
$$\big\{ x \in \mathbb{R}\,;\ a(I) \le x \le b(I) \big\}\,.$$
Le estremità $a(I)$ e $b(I)$, quando sono finite, possono appartenere ad I o no. Così abbiamo quattro tipi di intervalli I con l'estremità inferiore $a(I) = a$ e $b(I) = b$:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \big\{ x \in \mathbb{R}\,;\ a < x < b \big\}\,,\\
[a,b] &= \big\{ x \in \mathbb{R}\,;\ a \le x \le b \big\} \text{ (se } a\,,b \in \mathbb{R})\,,\\
[a,b) &= \big\{ x \in \mathbb{R}\,;\ a \le x < b \big\} \text{ (se } a \in \mathbb{R})\,,\\
(a,b] &= \big\{ x \in \mathbb{R}\,;\ a < x \le b \big\} \text{ (se } b \in \mathbb{R})\,.
\end{aligned}$$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si chiama *uniformamente continua* se

$f(x)$ e $f(y)$ sono arbitrariamente vicini
appena $x, y \in I$ sono sufficientemente vicini,
senza riguardo a dove si trovano x e y in I,

cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che
$$x, y \in I\,,\ |x - y| \le \delta \implies |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

→ *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformamente continua se e solo se per ogni due successioni $\big(x_n\big)_{n\ge1}$ e $\big(y_n\big)_{n\ge1}$ in I tale che $x_n - y_n \longrightarrow 0$ abbiamo*
$$f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f è uniformamente continua e siano $\big(x_n\big)_{n\geq 1}\,,\ \big(y_n\big)_{n\geq 1} \subset I$ tale che $x_n - y_n \longrightarrow 0\,.$
Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$x, y \in I\,,\ |x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,.$$

Ora, per $x_n - y_n \longrightarrow 0$ abbiamo $|x_n - y_n| \leq \delta$ da un indice n_o in poi e risulta

$$n \geq n_o \implies |x_n - y_n| \leq \delta \implies |f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon\,.$$

In altre parole, $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0\,.$

Viceversa, supponiamo che per successioni

$$\big(x_n\big)_{n\geq 1}\,,\ \big(x_n\big)_{n\geq 1} \subset I$$

vale l'implicazione

$$x_n - y_n \longrightarrow 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0\,,$$

ma f non è uniformamente continua, cioè esiste un $\varepsilon_o > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ possiamo trovare

$$x_\delta, y_\delta \in I \text{ con } |x_\delta - y_\delta| \leq \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon_o\,.$$

Allora, con $\delta = \frac{1}{n}$, troviamo due successioni $\big(x_n\big)_{n\geq 1}\,,\ \big(x_n\big)_{n\geq 1} \subset I$ tale che

$$|x_n - y_n| \leq \tfrac{1}{n}\,,\ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_o\,,$$

in contradizione con l'ipotesi

$$x_n - y_n \longrightarrow 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0\,.$$

Ricordiamo il teorema classico di Georg Cantor:

→ *Se I è chiuso e limitato, cioè $I = [a, b]$ con $-\infty < a \leq b < +\infty$, allora ogni funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformamente continua.*

Dimostrazione. Vedi il libro di testo, paragrafo 81.

Per la continuità uniforma di una funzione definita su un intervallo non necessariamente chiuso, abbiamo il seguente criterio:

→ *Perché una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ sia uniformamente continua, è sufficiente l'esistenza dei limiti*

$$\lim_{x\to a(I)^+} f(x) \in \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{x\to b(I)^-} f(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario.
Se indichiamo
$$L_1 = \lim_{x\to a(I)^+} f(x) \in \mathbb{R}\,, \quad L_2 = \lim_{x\to b(I)^-} f(x) \in \mathbb{R}\,,$$
allora esistono $a' > a(I)$ e $b' < b(I)$ tale che
$$x \in I\,,\, x \le a' \implies f(x) - L_1| \le \frac{\varepsilon}{6}\,,$$
$$x \in I\,,\, x \ge b' \implies f(x) - L_2| \le \frac{\varepsilon}{6}\,.$$
Poi, per il teorema di Cantor, f è uniformamente continua sull' intervallo chiuso limitato $[a', b']$, perciò esiste $\delta > 0$ tale che
$$x, y \in I\,,\, |x-y| \le \delta \implies |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$
Siano ora $x\,, y \in I$ arbitrari tale che $0 \le y - x \le \delta$.

Se $x\,, y \in [a', b']$, allora dalla scelta di δ risulta
$$|f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\,.$$
Se $x\,, y \le a'$, allora
$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - L_1| + |L_1 - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\,.$$
Similmente, se $x\,, y \ge b'$, allora $|f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
Poi, se $x \le a' \le y \le b'$, allora
$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f(a')| + |f(a') - f(y)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon\,.\end{aligned}$$
Similmente, se $a' \le x \le b' \le y$, allora $|f(x) - f(y)| \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
Finalmente, se $x \le a' \le b' \le y$, allora
$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f(a')| + |f(a') - f(b')| + |f(b') - f(y)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$
Cosicché abbiamo in tutti i casi $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$.

Se I è limitato, allora la condizione sufficiente di cui sopra è anche necessaria per la continuità uniforma di f:

→ *Se la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua, allora*

$$a(I) > -\infty \implies \textit{esiste} \lim_{x \to a(I)^+} f(x) \in \mathbb{R} \,,$$
$$b(I) < +\infty \implies \textit{esiste} \lim_{x \to b(I)^-} f(x) \in \mathbb{R} \,.$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che $a(I) \in \mathbb{R}$.

Allora per ogni successione $I \ni x_n \longrightarrow a(I)$ la successione dei valori $\big(f(x_n)\big)_{n \geq 1}$ è di Cauchy, quindi converge. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$x, y \in I \,,\ |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \,,$$

e poi un $n_\delta \geq 1$ con $|x_n - x_k| \leq \delta$ per ogni $n \,, k \geq n_\delta$. Perciò

$$n \,, k \geq n_\delta \implies |f(x_n) - f(x_k)| \leq \varepsilon \,.$$

Ora, se $I \ni x_n \longrightarrow a(I)$ e $I \ni y_n \longrightarrow a(I)$, allora $x_n - y_n \longrightarrow 0$ implica che $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0$ e così $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$. In altre parole esiste il limite finito $\lim\limits_{x \to a(I)^+} f(x)$.

Similmente si verifica che nel caso $b(I) \in \mathbb{R}$ la continuità uniforma di f implica l'esistemza del limite finito $\lim\limits_{x \to b(I)^-} f(x)$.

! Rimarchiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione uniformamente continua, ma $a(I) = -\infty$ o $b(I) = +\infty$, allora i limiti

$$\lim_{x \to a(I)^+} f(x) \ \text{ rispettivamente } \lim_{x \to b(I)^-} f(x)$$

non esistono sempre. Per esempio, la funzione sin definita sull'intera retta $(-\infty, +\infty)$ è uniformamente continua (vedremo che è addirittura lipschitziana), ma nessuno dei limiti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \,, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

esiste.

Risulta la seguente versione del teorema di Cantor per funzioni continue su intervalli limitati arbitrari:

→ *Se I è limitato, cioè $a(I) > -\infty$ e $b(I) < +\infty$, allora per la continuità uniforma di una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ è necessaria e sufficiente l'esistenza dei limiti*

$$\lim_{x \to a(I)^+} f(x) \in \mathbb{R} \,, \quad \lim_{x \to b(I)^-} f(x) \in \mathbb{R} \,.$$

Finiamo le nostre considerazioni sulla continuità uniforma mostrando che basta verificarla su pezzi del dominio:

→ *Supponiamo che I è l'unione di due intervalli I_1 , I_2 ed $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformamente continua sia su I_1 che su I_2 . Allora f è uniformamente continua su tutto I .*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora esistono $\delta_1 , \delta_2 > 0$ tali che

$$x, y \in I_1 \, , \, |x-y| \leq \delta_1 \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, ,$$
$$x, y \in I_2 \, , \, |x-y| \leq \delta_2 \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ed indichiamo con δ il più grande di δ_1 e δ_2 : $\delta = \max\,(\delta_1 , \delta_2)$.

Siano adesso $x , y \in I$ tali che $|x-y| \leq \delta$. Se $x , y \in I_1$ oppure $x , y \in I_2$, allora abbiamo chiaramente $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Mostriamo che anche nei casi $x \in I_1 \not\ni y$ e $x \in I_2 \not\ni y$ abbiamo $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Supponiamo che $x \in I_1 \not\ni y$ e, per farne una scelta, $x < y$. Allora $x \leq b(I_1) \leq y$ e, poiché $y \in I_2$, $a(I_2) \leq y$. Poi abbiamo necessariamente $a(I_2) \leq b(I_1)$, perché altrimenti l'intervallo non vuoto $\big(b(I_1) , a(I_1)\big) \subset I$ risulterebbe disgiunto sia ad I_1 che ad I_2 , quindi ad I . Perciò

$$\big[x , b(I_1)\big) \subset I_1 \, , \quad \big(b(I_1) , y\big] \subset I_2 \, , \quad b(I_1) \in I \, .$$

Per ogni $x' \in \big[x , b(I_1)\big) \subset I_1$ abbiamo

$$x' - x \leq b(I_1) - x \leq y - x \leq \delta_1 \, ,$$

perciò $|f(x') - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Per $x' \to b(I_1)$ risulta

$$\big|f\big(b(I_1)\big) - f(x)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Similmente si verifica che

$$\big|f(y) - f\big(b(I_1)\big)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e concludiamo :

$$\begin{aligned} \big|f(y) - f(x)\big| &\leq \big|f(y) - f\big(b(I_1)\big)\big| + \big|f\big(b(I_1)\big) - f(x)\big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Sulle funzioni lipschitziane:

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si chiama *lipschitziana* (o *di Lipschitz*) se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\,, \qquad x\,, y \in I\,.$$

In altre parole, f è lipschitziana se i moduli di tutti i suoi rapporti incrementali sono limitati da una costante L:

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq L\,, \qquad x\,, y \in I\,,\; x \neq y\,.$$

Se f è lipschitziana, allora l'estremo superiore

$$L(f) = \sup_{\substack{x,y\in I\\ x\neq y}} \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|,$$

cioè la più piccola costante L con $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$ per tutti i $x\,, y \in I$, si chiama *la costante di Lipschitz* di f.

Una funzione lipschitziana f è uniformamente continua: per ogni $\varepsilon > 0$ la δ nella definizione della continuità uniforma può essere scelta esplicitamente $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$.

Se I è un intervallo non degenere, cioè con $a(I) < b(I)$, allora una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ e lipschitziana se e solo se la sua restrizione all'interno $\big(a(I)\,, b(I)\big)$ di I è lipschitziana e allora $L(F)$ è uguale alla costante di Lipschitz della restrizione di F a $\big(a(I)\,, b(I)\big)$.

$\rightarrow$ *Una funzione derivabile $f : (a\,, b) \to \mathbb{R}$ è lipschitziana se e solo se la sua derivata f' è limitata e allora*

$$L(f) = \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)|\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che

$$M = \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)| < +\infty\,.$$

Per ogni $a < x < y < b$ il teorema del valor medio di Lagrange ci garantisce l'esistenza di un $x < \xi < y$ tale che $f(y) - f(x) = f'(\xi)\,(y - x)$ e risulta

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \left|f'(\xi)\right| \leq M \, .$$

Perciò f è lipschitziana e $L(f) \leq M$.

Supponiamo adesso che f è lipschitziana. Allora, per ogni $x \in (a,b)$,

$$\left|f'(x)\right| = \lim_{x\neq y\to x} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq L(F) \, .$$

Risulta che f' è limitata e $\sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| \leq L(f)$.

Esempi:

La funzione sin definita sull'intera retta è lipschitziana e la sua costante di Lipschitz è $1:$ la sua derivata $(\sin x)' = \cos x$ è limitata e il massimo di $|\cos x|$ è 1 .

La funzione $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x \log x$ non è lipschitziana: infatti, è derivabile e la sua derivata $f'(x) = \log x + 1$ non è limitata. Però, siccome il limite

$$\lim_{0<x\to 0} f(x) = \lim_{0<x\to 0} x \log x = 0$$

esiste ed è finito, f è uniformamente continua.

Anche la lipschitzianità si può verificare su pezzi del dominio:

→ *Supponiamo che l'intervallo I è l'unione di due intervalli I_1, I_2 . Allora una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, che è lipschitziana sia su I_1 che su I_2 , sarà lipschitziana su tutto I . Per di più, $L(f)$ è la più grande delle costanti di Lipschitz delle due restrizioni.*

Dimostrazione. Si imita la dimostrazione del risultato analogo per la continuità uniforma.