NOME: .... MATRICOLA: ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2009/2010
Calcolo 1, Esame scritto del 15.09.2010

1) Data la funzione

$$f(x) = x^2 \ln(x)\,,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Sia data la funzione $f(x) = x \arctan(2\,x^2)$.

a) Calcolare, in $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor di ordine 7 di f.

b) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2x^3}{4x^7}\ .$$

3) Studiare la convergenza assoluta e semplice della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

4) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{(x+1)^2} \,.$$

5) Sia data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x^2 + y^2 + 2y + 4 \,.$$

a) Trovare i massimi e minimi relativi di f ;

b) Data la forma differenziale

$$\omega = \partial_x f\, dx + \partial_y f\, dy \,,$$

calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva data dal grafico della funzione $y = \sin(x) \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\sin(x)\right)$ per $x \in \left[0\,, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale ha senso $\ln(x)$. Perciò il dominio di f è $\big(0\,,+\infty\big)$.

b) La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$

Ma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\,\ln(x) = +\infty$$

e di conseguenza f non ha asintoto obliquo (in particolare, f non ha asintoto orizzontale).

D'altro canto

$$\lim_{0<x\to 0} f(x) = \lim_{0<x\to 0} x^2\ln(x) \overset{t=\ln(x)}{=} \lim_{t\to-\infty} t\,e^{2t} \overset{s=-t}{=} \lim_{s\to+\infty} -\frac{s}{e^{2s}} = 0\,.$$

Risulta che f si estende per continuità su $\big[0\,,+\infty\big)$. In particolare, f non ha asintoto verticale.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = 2\,x\ln(x) + x = x\big(2\,\ln(x)+1\big)\,.$$

Risulta che il solo zero di f' è

$$a = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,60653...\,.$$

e

$$f' \text{ è } < 0 \text{ in } \big(0\,,a\big)\,,$$
$$f' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(a\,,+\infty\big)\,.$$

Cosicché f risulta ad essere

strettamente decrescente in $\big(0\,,a\big]$,
strettamente crescente in $\big[a\,,+\infty\big)$.

In particolare, a è un punto di minimo assoluto e il valore minimo di f è

$$f(a) = -\frac{1}{2e} \approx -0,18394... \,.$$

Rimarchiamo che l'estensione di f per continuità su $\big[0\,,+\infty\big)$, indicata con la stessa lettera f, ha la derivata destra

$$\begin{aligned} f_d^{'}(0) &= \lim_{0<x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{0<x\to 0} x\ln(x) \\ &\overset{t=\ln(x)}{=} \lim_{t\to -\infty} t\,e^t \\ &\overset{s=-t}{=} \lim_{s\to +\infty} -\frac{s}{e^s} = 0\,. \end{aligned}$$

Possiamo trovare gli intervalli di convessità e di concavità di f , e quindi anche i suoi punti di flesso, calcolando la seconda derivata :

$$f''(x) = 2\,\ln(x) + 1 + x\left(2\,\frac{1}{x}\right) = 2\,\ln(x) + 3\,.$$

Risulta che f'' si annulla solo una volta in

$$b = e^{-3/2} = \frac{1}{e\sqrt{e}} \approx 0,22313... < a$$

e

$$\begin{aligned} &f''(x) < 0 \;\text{ per }\; x \in \big(0\,,b\big)\,, \\ &f''(x) > 0 \;\text{ per }\; x \in \big(0\,,+\infty\big)\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza f

$$\begin{aligned} &\text{è concava in } \big(0\,,b\big]\,, \\ &\text{è convessa in } \big[b\,,+\infty\big) \end{aligned}$$

e quindi ha un punto di flesso in b . Calcoliamo i valori di f e f' in b :

$$f(b) = -\frac{3}{2\,e^3} \approx -0,07468...\,, \quad f'(b) = -\frac{2}{(\sqrt{e})^3} \approx -0,44626...\,.$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	0		b		a		1		$+\infty$
f'	0	$-$	$-0,45$	$-$	0	$+$	1	$+$	
f''		$-$	0			$+$			
f	0	$\searrow$	$-0,075$	$\searrow$	$-0,184$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :
Il grafico di f decresce da $(0\,,0)$ fino al punto di minimo $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\,,-\dfrac{1}{2\,e}\right)$, avendo tangente orizzontale in ambi questi due punti, e poi cresce, attraversando $(1\,,0)$, fino a $+\infty$ in $+\infty$. Il grafico è concava tra $(0\,,0)$ ed il punto di flesso $\left(\dfrac{1}{e\sqrt{e}}\,,-\dfrac{3}{2\,e^3}\right)$, nel quale il coefficiente angolare della retta tangente è $-\dfrac{2}{(\sqrt{e})^3}\approx -0,44626...$, per diventare convesso in continuazione.

2) **:** a) Ricordiamo che la serie di Taylor di centro 0 della funzione arctan è

$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \dots .$$

Chi non dovesse ricordarla, può dedurre integrando termine a termine la serie geometrica

$$\big(\arctan y\big)' = \frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - \dots .$$

Risultano successivamente le serie di Taylor

$$\arctan(2\,x^2) = 2\,x^2 - \frac{8\,x^6}{3} + \frac{32\,x^{10}}{5} - \dots ,$$
$$f(x) = x\arctan(2\,x^2) = 2\,x^3 - \frac{8\,x^7}{3} + \frac{32\,x^{11}}{5} - \dots .$$

In particolare, il polinomio di Taylor di ordine 7 di centro 0 di f è

$$2\,x^3 - \frac{8\,x^7}{3} .$$

b) Applicando la formula di Taylor con il resto di Peano alla funzione f si ottiene

$$f(x) = 2\,x^3 - \frac{8\,x^7}{3} + o(x^7) \ \text{ per } \ x \to 0 .$$

Cosicché

$$\frac{f(x) - 2\,x^3}{4x^7} = -\,\frac{2}{3} + o(1) \ \text{ per } \ x \to 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2\,x^3}{4x^7} = -\,\frac{2}{3}\ .$$

3) **:** Il raggio di convergenza della serie possiamo trovare usando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^n}{n!}}{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}\ .$$

Risulta che la serie converge assolutamente per $|x| < \dfrac{1}{e}$ e non converge per $|x| > \dfrac{1}{e}$.

Per vedere il comportamento della serie nei punti $x = \pm\dfrac{1}{e}$, dobbiamo studiare $\dfrac{n^n}{n!}\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.

Anzitutto vale

$$\frac{n^n}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n \geq \frac{1}{e\,n} \iff \frac{n^n}{(n-1)!}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \geq 1\,, \qquad n \geq 1\ :\quad (*)$$

Infatti, (*) e ovvia per $n = 1$ e, assumendo che vale per un n, risulterà anche per $n+1$ perché

$$\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}\left(\dfrac{1}{e}\right)^n}{\dfrac{n^n}{(n-1)!}\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}\,\frac{1}{e} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} > 1\ .$$

Usando la divergenza della serie armonica ed il criterio del confronto risulta che per $x = \dfrac{1}{e}$ la nostra serie diverge.

Mostriamo ora che

$$\text{la successione } \frac{n^n}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n,\ n \geq 1\,,\ \text{decresce}\ :$$

Infatti,

$$\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n+1}}{\dfrac{n^n}{n!}\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n}} = \frac{(n+1)^n}{n^n}\,\frac{1}{e} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{e} < 1\,.$$

Cosicché la successione decrescente di numeri positivi $\dfrac{n^n}{n!}\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$, $n \geq 1$, converge. Si può verificare (per esempio, usando la formula di Stirling) che il limite sarà 0.

Adesso possiamo applicare il criterio di Leibniz per dimostrare che la nostra serie di potenze converge, ma non assolutamente, per $x = -\dfrac{1}{e}$.

4) **:** Tramite integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x^2+1)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x+1}\right)\\ &= -\frac{\ln(x^2+1)}{x+1} + \int\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2\,x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{2\,x}{(x+1)\,(x^2+1)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{2\,x}{(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b\,x+c}{x^2+1}$$

ed allora

$$2\,x = a\,(x^2+1) + (b\,x+c)\,(x+1)\,.$$

Risultano

$$a = -1\,,\quad b\,x+c = x+1$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}&\int \frac{\ln(x^2+1)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\ln(x^2+1)}{x+1} + \int \frac{2\,x}{(x+1)\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{x+1} - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$
$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C\,.$$

5) : a) I massimi e minimi relativi di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x^2 + y^2 + 2y + 4\,.$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 2\,x\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,y + 2\,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 - 2\,x = 0 \\ 2\,y + 2 \ = 0 \end{cases},$$

cioè i punti

$$(0\,,-1)\,,\quad (2\,,-1)\,.$$

Per poter dire se jun punto stazionario è massimo o minimo relativo, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,x - 2\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,.$$

Perciò la matrice hessiana di f in $(x\,,y)$ è

$$\begin{pmatrix} 2\,x-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

con determinante

$$\begin{vmatrix} 2\,x-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\,(x-1)\,.$$

Ora, poiché il determinante della matrice hessiana in $(0\,,-1))$ è strettamente negativo, questo punto è un punto di sella.

D'altro canto, il determinante della matrice hessiana in $(2\,,-1)$ è strettamente positivo. Perciò questo punto è un punto di estremo relativo. Poiché l'elemento nell'angolo sinistro superiore della matrice hessiana in $(2\,,-1)$ è >0, il punto $(2\,,-1)$ è un punto di minimo relativo.

b) Poiché ω è una forma differenziale esatta su $\mathbb{R}^2$ ed f è una sua primitiva, per ogni curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^2$

$$[a\,,b] \ni t \longmapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$$

abbiamo

$$\int_\gamma \omega = f\Big(\gamma(b)\Big) - f\Big(\gamma(a)\Big)\ .$$

In particolare, se γ è il grafico della funzione $y = \sin(x)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\sin(x)\right)$ per $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, allora

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= f\left(\frac{\pi}{2}\,,\mathrm{arctg}\frac{\pi}{4}\right) - f\big(0\,,0\big)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\mathrm{arctg}\frac{\pi}{4}\right)^2 + 2\,\mathrm{arctg}\frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$