NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 2, Esame scritto del 10.07.2008

1) Determinare gli intervalli in cui la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x}\right)^2$$

è uniformamente continua e quelli in cui è lipschitziana.

2) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right]^{\alpha} .$$

3) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \, .$$

4) Calcolare l'area della regione piana compresa fra l'arco di parabola

$$y = 1 - \frac{4}{\pi^2} x^2 \, , \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

e l'arco

$$y = \cos x \, , \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \, .$$

5) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \, .$$

Soluzioni:

1) **:** f è derivabile e la sua derivata

$$f'(x) = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x}$$

è limitata sull'intero dominio $(0,+\infty)$ di f. Infatti, esiste il limite finito

$$\lim_{0<x\to 0} f'(x) \overset{t=\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t}{\mathrm{tg}\,t} \cdot \frac{1}{1+(\mathrm{tg}\,t)^2} = 1\,,$$

mentre, poiché

$$\left| \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+x}\,, \qquad x \geq 1\,,$$

esiste anche il limite finito

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0\,.$$

Risulta che f è lipschitziana, ed in particolare uniformamente continua, in tutto il suo dominio.

2) **:** Poiché

$$\lim_{0<u\to 0} \frac{\log(1+u)}{u} = 1 \quad \text{e così} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = 1\,,$$

per il criterio del confronto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]^{\alpha}$$

converge esattamente quando converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}\,,$$

cioè per

$$2\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}\,.$$

3) : Per determinare una primitiva della funzione

$$\frac{x^3-1}{x^3+1} = 1 - 2\,\frac{1}{x^3+1}$$

usiamo lo sviluppo di $\dfrac{1}{x^3+1}$ in fratti semplici :

La decomposizione del polinomio con coefficienti reali x^3+1 in fattori irriducili è $x^3+1 = (x+1)\,(x^2-x+1)$. Perciò

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B\,x+C}{x^2-x+1}\,,$$

cioè

$$1 = A\,(x^2-x+1) + (B\,x+C)\,(x+1)$$

per opportune costanti reali A, B, C . Per $x=-1$ otteniamo

$$1 = 3\,A\,,\ \text{ossia } A = \frac{1}{3}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}(B\,x+C)\,(x+1) &= 1 - \frac{1}{3}\,(x^2-x+1) = \frac{1}{3}\,(-x^2+x+2)\\ &= \frac{1}{3}\,(x+1)(-x+2)\end{aligned}$$

e risulta

$$B\,x+C = \frac{1}{3}\,(-x+2)\,,\ \text{ cioè } B = -\frac{1}{3}\ ,\ C = \frac{2}{3}\,.$$

Concludiamo che

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\,\frac{x-2}{x^2-x+1}\,.$$

Risulta :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= x - 2\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x\\ &= x - \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{2}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Per integrare $\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$, mettiamo in evidenza nel numeratore la derivata $2x-1$ del denominatore :

$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-4}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}$$

Risulta che

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(x^2-x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$

e quindi

$$\int \frac{x^3-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = x - \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\log(x^2-x+1) - \int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ora, per integrare $\dfrac{1}{x^2-x+1}$, scriviamo il denominatore come un moltiplo scalare della somma di 1 con il quadrato di un polinomio di grado 1 :

$$x^2-x+1 = \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

Risulta che

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

e così

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^3-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \\ &= x - \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\log(x^2-x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\,.\end{aligned}$$

4) **:** Anzitutto mostriamo che

$$0 \leq \cos x \leq 1 - \frac{4}{\pi^2} x^2 \,, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \,,$$

quindi la regione compresa fra l'arco

$$y = \cos x \,,\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

e l'asse delle x <u>è contenuta</u> nella regione compresa fra l'arco di parabola

$$y = 1 - \frac{4}{\pi^2} x^2 \,,\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

e l'asse delle x :

Consideriamo la funzione derivabile

$$f(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2} x^2 - \cos x \,.$$

Allora

$$f'(x) = \sin x - \frac{8}{\pi^2} x \,, \qquad f''(x) = \cos x - \frac{8}{\pi^2} \,.$$

Poiché $0 < \dfrac{8}{\pi^2} < 1$, esiste $0 < x_1 < \dfrac{\pi}{2}$ tale che $\cos x_1 = \dfrac{8}{\pi^2}$ ed abbiamo

x	0		x_1		$\pi/2$
f''		$+$	0	-	
f'	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$1 - 4/\pi < 0$

Ora, per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste $x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$ con $f'(x_2) = 0$ e risulta

x	0		x_1		x_2		$\pi/2$
f''		$+$	0		-		
f'	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$1 - 4/\pi < 0$
f	0		$\nearrow$		max	$\searrow$	0

Concludiamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. Poiché f è pari, la positività $f(x) \geq 0$ vale anche per ogni $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

Così l'area tra le due archi è la differenza

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\, x^2\right) \mathrm{d}x - \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x = \left(x - \frac{4}{\pi^2}\,\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \sin x \,\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{3}\,\pi - 2 = \frac{2}{3}\,(\pi - 3)\,.$$

5) : L'integrale

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

può essere improprio (dipendente dal valore di α) sia in 0 che a $+\infty$. Esaminiamo separatamente la sua convergenza in 0 ed all'infinito.

Poiché

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\log\,(1+x)}{x} = 1 \qquad \text{e così} \qquad \lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{\log(1+x)}{x^\alpha}}{\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}} = 1\,,$$

per il criterio del confronto

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \alpha < 2\,.$$

D'altro canto, poiché

$$\frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,, \qquad x \geq e-1$$

abbiamo

$$\int\limits_{e-1}^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \implies \int\limits_{e-1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \alpha > 1\,.$$

Viceversa, se $\alpha > 1$ e scegliamo un $\alpha > \beta > 1$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\log(1+x)}{x^\alpha}}{\dfrac{1}{x^\beta}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{\alpha-\beta}} = 0 < +\infty$$

e la convergenza di $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ implicano che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge.}$$

Cosicché

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

e concludiamo che

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge}\\
\iff\ &\int_0^{1} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ e } \int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ convergono}\\
\iff\ &\alpha < 2 \ \text{ e } \ \alpha > 1\\
\iff\ &1 < \alpha < 2\,.
\end{aligned}$$