NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2013/2014
Analisi Reale e Complessa, Esame del 08.09.2014

1) Sia $E := \big\{ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < 2\,, 0 < y < 2\,, xy < 1 \big\}$ e definiamo la funzione $f : E \longrightarrow \big(0\,,+\infty\big)$ tramite la formula

$$f(x\,,y) = \frac{1}{1-xy}\,.$$

(α) È la funzione f misurabile? Si giustifichi la risposta.

(β) Ponendo

$$E_k := \Big\{ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < 2\,, 0 < y < 2\,, xy < 1 - \frac{1}{k} \Big\}, \quad k \geq 1\,,$$

è vera l'uguaglianza

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_k} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{E} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,?$$

(γ) È la funzione f sommabile?

2) Sia $F : \big(0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(s) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{1+x}\,\mathrm{d}x\,.$$

(i) Si dimostri che F è derivabile e si esprima $F'(s)$ mediante un integrale dipendente dal parametro s.

(iii) Si verifichi che F soddisfa l'equazione differenziale

$$F'(s) - F(s) = -\frac{1}{s}\,.$$

3) Sia $\Delta_r \subset \mathbb{C}$ il disco aperto di raggio r centrato in 0 e sia $\overline{\Delta}_r \subset \mathbb{C}$ la sua chiusura in $\mathbb{C}$.

(a) Si calcoli il residuo in 0 e gli sviluppi in serie di Laurent di

$$f(z) := \frac{z-5}{z^4+z^3}$$

in $\Delta_1 \setminus \{0\}$ e in $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}_1$.

(b) Si calcoli lo sviluppo in serie di Laurent di

$$g(z) := \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

in $\Delta_3 \setminus \overline{\Delta}_2$.

(c) Si mostri che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^{n+3} \sin(z)$$

definisce una funzione olomorfa h in Δ_1 e si determini il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di h nel punto $i/2$.

4) Calcolare

$$\text{A)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+2x+17)^2}\, \mathrm{d}x$$

$$\text{B)} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos(\theta)}\, \mathrm{d}\theta$$

usando il teorema dei residui.

Soluzioni:

1) : (α) Osserviamo anzitutto che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$E(a) := \big\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 < x < 2\,, 0 < y < 2\,, xy < a\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

è aperto, quindi misurabile, essendo l'intersezione del rettangolo aperto $(0\,,2) \times (0\,,2)$ con la controimmagine dell'intervallo aperto $(-\infty\,,a)$ tramite la funzione continua $\mathbb{R}^2 \ni (x\,,y) \longmapsto xy$.

In particolare l'insieme $E = E(1)$ è misurabile e misurabili sono anche tutti gli insiemi $E_k = E\big(1 - 1/k\big)\,, k \geq 1$.

La funzione

$$E \ni (x\,,y) \longmapsto f(x\,,y) = \frac{1}{1 - xy}\,,$$

definita sull'insieme misurabile E, è continua, perciò è una funzione misurabile.

(β) Poiché $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ ...$ e $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = E$, indicando con χ_S la funzione caratteristica di $S \subset \mathbb{R}$, la successione di funzioni misurabili positive $\chi_{E_k}\,, k \geq 1$, è crescente e converge puntualmente a χ_E. Siccome $f \geq 0$, abbiamo la stessa cosa anche per i prodotti con f:

$$0 \leq \chi_{E_k} f \nearrow \chi_E\, f\,.$$

Per il teorema della convergenza monotona possiamo quindi concludere che

$$\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \chi_{E_k}(x\,,y)\, f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{=\int\limits_{E_k} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \nearrow \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \chi_E(x\,,y)\, f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{=\int\limits_{E} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,.$$

(γ) La sommabilità della funzione misurabile positiva f è equivalente alla finitezza dell'integrale

$$\int\limits_E f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_E \frac{1}{1 - xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{1}$$

Per decidere sulla finitezza dell'integrale (1), lo dobbiamo o calcolare, o almeno stimare nel senso utile (una stima superiore finita implicherebbe la sua finitezza, mentre una stima inferiore infinita implicherebbe la sua infinitezza).

Per applicare il teorema di Tonelli, dividiamo E in due parti misurabili disgiunti: $E = A \cup B$ dove

$$A := \left\{ (x\,, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 < x \leq \frac{1}{2}\,, 0 < y < 2 \right\},$$
$$B := \left\{ (x\,, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \frac{1}{2} < x < 2\,, 0 < y < \frac{1}{x} \right\}.$$

Allora

$$\int\limits_E \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_A \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_B \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2}$$

Il primo integrale alla parte destra di (2) è finito :

$$\int\limits_A \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty\,. \tag{3}$$

Infatti, per il teorema di Tonelli si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int\limits_A \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_0^{1/2} \left(\int\limits_0^2 \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^{1/2} \left(\int\limits_0^2 -\frac{\mathrm{d}(1-xy)}{1-xy} \right) \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \int\limits_0^{1/2} \left(-\ln(1-xy) \Big|_{y=0}^{y=2} \right) \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int\limits_0^{1/2} \left(-\frac{\ln(1-2x)}{x} \right) \mathrm{d}x \\
&\overset{t=2x}{=} \int\limits_0^{1} \left(-\frac{\ln(1-t)}{t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{1/2} \left(-\frac{\ln(1-t)}{t} \right) \mathrm{d}t + \int\limits_{1/2}^{1} \left(-\frac{\ln(1-t)}{t} \right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{1/2} \Big(- \frac{\ln(1-t)}{t} \Big) \mathrm{d}t + 2 \int_{1/2}^{1} \Big(- \ln(1-t) \Big) \mathrm{d}t \,,$$

dove

$$\int_0^{1/2} \Big(- \frac{\ln(1-t)}{t} \Big) \mathrm{d}t < +\infty$$

perché la funzione

$$\big(0\,,1/2\big] \ni t \longmapsto - \frac{\ln(1-t)}{t}$$

si estende per continuità su $\big[0\,,1/2\big]$ ed è così limitata, mentre

$$\int_{1/2}^{1} \Big(- \ln(1-t) \Big) \mathrm{d}t = \Big((1-t)\ln(1-t) + t \Big) \Big|_{t=1/2}^{t=1} = \frac{1+\ln 2}{2} \,.$$

Il secondo integrale alla parte destra di (2) è invece infinito :

$$\int_B \frac{1}{1-xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = +\infty \,. \tag{4}$$

Per vederlo, applichiamo di nuovo il teorema di Tonelli :

$$\begin{aligned} &\int_B \frac{1}{1-xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{1/2}^{1} \Big(\int_0^{1/x} \frac{1}{1-xy} \Big) \mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1} \Big(\int_0^{1/x} - \frac{\mathrm{d}(1-xy)}{1-xy} \, \mathrm{d}y \Big) \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \int_{1/2}^{1} \Big(- \ln(1-xy) \Big|_{y=0}^{y=1/x} \Big) \frac{\mathrm{d}x}{x} \,. \end{aligned}$$

Poiché

$$- \ln(1-xy) \Big|_{y=0}^{y=1/x} = \lim_{1/x > y \to 1/x} \Big(- \ln(1-xy) \Big) = +\infty$$

per ogni $x > 0$, risulta

$$\int\limits_B \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{1/2}^{1} \left(-\ln(1-xy)\Big|_{y=0}^{y=1/x} \right) \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty\,.$$

In base a (2), (3) e (4) concludiamo che f non è sommabile :

$$\int\limits_E \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underbrace{\int\limits_A \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\in(0,+\infty)} + \underbrace{\int\limits_B \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{=+\infty} = +\infty$$

(in verità qui (3) non è essenziale, l'infinitezza dell'integrale di f su E è già garantita da (4)).

Osservazione.

Possiamo dimostrare che la funzione

$$E \ni (x\,,y) \longmapsto \frac{1}{(1-xy)^p} \tag{5}$$

è sommabile esattamente quando $p < 1$.

Per prima, poiché la funzione positiva (5) è continua, quindi misurabile, la sua sommabilità è equivalente alla finitezza dell'integrale

$$\int\limits_E \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_A \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_B \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{6}$$

dove gli insiemi A e B sono quelli di prima :

$$A := \left\{ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 < x \leq \frac{1}{2}\,, 0 < y < 2 \right\},$$
$$B := \left\{ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \frac{1}{2} < x < 2\,, 0 < y < \frac{1}{x} \right\}.$$

Per $p \geq 1$ la disuguaglianza

$$\frac{1}{(1-xy)^p} \geq \frac{1}{1-xy}\,, \qquad (x\,,y) \in E$$

e l'infinitezza dell'integrale (1) implicano l'infinitezza dell'integrale (6), cioè la non sommabilità della funzione (5).

Supponiamo adesso che $p < 1 \iff 1-p > 0$. La disuguaglianza

$$\frac{1}{(1-xy)^p} \leq \frac{1}{1-xy}\,, \qquad (x\,,y)\in E\supset A$$

e (3) implicano la finitezza del primo integrale alla parte destra di (6).

Per verificare al finitezza anche del secondo integrale alla parte destra di (6), applichiamo il teorema di Tonelli :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_B \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{1/2}^{2}\Big(\int\limits_0^{1/x}\frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int\limits_{1/2}^{2}\Big(\int\limits_0^{1/x} -\frac{\mathrm{d}(1-xy)}{(1-xy)^p}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \int\limits_{1/2}^{2}\Big(-\frac{(1-xy)^{1-p}}{1-p}\,\Big|_{y=0}^{y=1/x}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int\limits_{1/2}^{2}\frac{1}{(1-p)\,x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln 4}{1-p}\,.
\end{aligned}$$

Cosiché per $p<1$ la funzione (5) è sommabile.

2) **:** (i) Poiché le funzioni

$$[\,0\,,+\infty)\ni x\longmapsto \frac{e^{-sx}}{1+x}\,, \qquad s\in(\,0\,,+\infty) \tag{7}$$

sono continue, quindi misurabili, ed abbiamo, per ogni $s\in(\,0\,,+\infty)\,,$

$$0\leq \frac{e^{-sx}}{1+x}\leq e^{-sx}\,, \qquad x\in[\,0\,,+\infty)\,,$$

dove

$$[\,0\,,+\infty)\ni x\longmapsto e^{-sx}$$

è sommabile, le funzioni (7) sono sommabili. Perciò $F:(\,0\,,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ è ben definita.

Poi, siccome le funzioni

$$(0\,,+\infty)\ni s\longmapsto \frac{e^{-sx}}{1+x}\,, \qquad x\in[\,0\,,+\infty)$$

sono derivabili e, per ogni $\varepsilon>0$, le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{e^{-sx}}{1+x} = -\,\frac{x\,e^{-sx}}{1+x}$$

ammettono la maggiorazione uniforme

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{e^{-sx}}{1+x}\right| \leq e^{-\varepsilon x}\,, \qquad x\in[\,0\,,+\infty)\,, s\in(\,\varepsilon\,,+\infty)\,,$$

dove la funzione

$$[\,0\,,+\infty)\ni x\longmapsto e^{-\varepsilon x}$$

è sommabile, per il teorema sulla dipendenza derivabile da parametri reali la funzione F è derivabile in $(\,\varepsilon\,,+\infty)$ e vale la formula

$$F'(s) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{e^{-sx}}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,e^{-sx}}{1+x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s\in(\,\varepsilon\,,+\infty)\,.$$

Poiché $\varepsilon>0$ è arbitrario, possiamo quindi concludere che F è derivabile in tutto $(\,0\,,+\infty)$ ed abbiamo

$$F'(s) = -\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,e^{-sx}}{1+x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s\in(\,0\,,+\infty)\,. \tag{8}$$

(ii) Usando la formula (8) deduciamo per ogni $s>0$:

$$\begin{aligned}
F'(s)-F(s) &= -\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,e^{-sx}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-sx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int\limits_0^{+\infty}\frac{(x+1)\,e^{-sx}}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{+\infty}e^{-sx}\mathrm{d}x \\
&\overset{t=sx}{=} -\frac{1}{s}\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\left(-\,e^{-t}\,\Big|_{t=0}^{t=+\infty}\right) = -\,\frac{1}{s}\,.
\end{aligned}$$

3) : (a): Abbiamo

$$f(z) := \frac{z-5}{z^4+z^3} = \frac{1}{z^2(z+1)} - \frac{5}{z^3(z+1)}\,.$$

Se $|z| < 1$, abbiamo $\dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k$. Perciò, se $|z| < 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{k-2} \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k z^{k-2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+2} z^k \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z^3(z+1)} \\
&= \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{k-3} \\
&= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^k z^{k-3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+3} z^k \\
&= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty} -(-1)^{k+2} z^k = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k.
\end{aligned}$$

In conclusione, per lo sviluppo in serie di Laurent di f in $\Delta_1 \setminus \{0\}$, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) := \frac{z-5}{z^4+z^3} &= \frac{1}{z^2(z+1)} - \frac{5}{z^3(z+1)} \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k - 5\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k\right) \\
&= -\frac{5}{z^3} + \frac{6}{z^2} - \frac{6}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\, 6\, z^k.
\end{aligned}$$

In particolare il residuo di f in 0 è -6.

Se $|z| > 1$ allora $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$ e $\dfrac{1}{1+z} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{k+1}}$. Quindi se $|z| > 1$, allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{k+3}}\\ &= \sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^{k-3}\frac{1}{z^k} = -\sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^{k-4}\frac{1}{z^k} = -\sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{z^k}\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3(z+1)} &= \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{k+4}}\\ &= \sum_{k=4}^{+\infty}(-1)^{k-4}\frac{1}{z^k} = \sum_{k=4}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{z^k}.\end{aligned}$$

In conclusione, per lo sviluppo in serie di Laurent di f in $\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}_1$, si ha

$$\begin{aligned}f(z) := \frac{z-5}{z^4+z^3} &= \frac{1}{z^2(z+1)} - \frac{5}{z^3(z+1)}\\ &= -\sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{z^k} - 5\left(\sum_{k=4}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{z^k}\right)\\ &= \frac{1}{z^3} + \sum_{k=4}^{+\infty} -6\,(-1)^k\frac{1}{z^k}\,.\end{aligned}$$

(b): Abbiamo $g(z) := \dfrac{1}{(z-2)(z-3)} = \dfrac{1}{z-3} - \dfrac{1}{z-2}$. Se $|z| < 3$ si ha $\left|\dfrac{z}{3}\right| < 1$ e perciò

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-1}{3^{k+1}}z^k\,.$$

Se $|z| > 2$ si ha $\left|\dfrac{2}{z}\right| < 1$ e perciò

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k-1}}{z^k}\,.$$

In conclusione, per lo sviluppo in serie di Laurent di g in $\Delta_3 \setminus \overline{\Delta}_2$, si ha

$$g(z) := \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-1}{3^{k+1}}z^k + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-2^{k-1}}{z^k}\,.$$

(c): Per ogni $z \in \Delta_1$ si ha $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ e la convergenza della serie geometrica è uniforme su ogni compatto incluso in Δ_1. Per il Teorema di Weierstrass, per ogni $z \in \Delta_1$ si ha allora

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,z^{k-1}\,,$$

cioè

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\,z^k\,,$$

per ogni $z \in \Delta_1$.

Di conseguenza abbiamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\,z^{k+3}\sin(z) = z^3\sin(z)\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\,z^k = \frac{z^3\sin(z)}{(1-z)^2}$$

per ogni $z \in \Delta_1$.

In particolare la serie data definisce una funzione olomorfa h in Δ_1. Siccome h si estende ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, con un polo in 1, il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di h intorno ad $\dfrac{i}{2}$ è pari alla distanza di $\dfrac{i}{2}$ da 1 e cioè a $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (per quanto visto a lezione sappiamo che il raggio di convergenza cercato è maggiore del raggio di ogni cerchio di centro $\dfrac{i}{2}$ contenuto nel dominio di una estensione olomorfa di h, inoltre non può essere strettamente maggiore di $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ perché altrimenti h si estenderebbe ad una funzione olomorfa anche in un intorno di 1).

4) **:** (A): Siccome la funzione integranda è asintotica a $\dfrac{1}{x^4}$ a $+\infty$ e $-\infty$, l'integrale improprio converge e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+2x+17)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1}{(x^2+2x+17)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Sia $\gamma_{1,r}$ il segmento orientato con estremi $-r$ e r e sia $\gamma_{2,r}$ la semicirconferenza di centro 0 e raggio r orientata in senso antiorario e contenuta nel semipiano superiore. Abbiamo

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{(x^2+2x+17)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma_{1,r}} \frac{1}{(z^2+2z+17)^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

I poli della funzione meromorfa $\dfrac{1}{(z^2+2z+17)^2}$ sono i punti $-1+4i$ e $-1+4i$ e sono entrambi di ordine 2. Osserviamo che per $r > \sqrt{17}$ il solo $-1+4i$ è contenuto nella parte di piano complesso limitata delimitata dall'unione di $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$.

Per il teorema dei residui, per $r > \sqrt{17}$ abbiamo

$$\int_{\gamma_{1,r}} \frac{1}{(z^2+2z+17)^2}\,\mathrm{d}z$$
$$= -\int_{\gamma_{2,r}} \frac{1}{(z^2+2z+17)^2}\,\mathrm{d}z + Res\left(\frac{1}{(z^2+2z+17)^2}\,, -1+4i\right).$$

Siccome $\dfrac{1}{(z^2+2z+17)^2}$ è asintotica a $\dfrac{1}{z^4}$ per $z\to\infty$, usando il lemma del grande cerchio otteniamo $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_{2,r}} \frac{1}{(z^2+2z+17)^2}\,\mathrm{d}z = 0$ e quindi

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_{1,r}} \frac{1}{(z^2+2z+17)^2}\,\mathrm{d}z = Res\left(\frac{1}{(z^2+2z+17)^2}\,, -1+4i\right).$$

Siccome $\dfrac{1}{(z^2+2z+17)^2}$ ha un polo doppio in $-1+4i$,

$$Res\left(\frac{1}{(z^2+2z+17)^2}\,, -1+4i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi i \lim_{z\to -1+4i} \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-(-1+4i))^2}{(z^2+2z+17)^2}\right)\\
&= 2\pi i \lim_{z\to -1+4i} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-(-1-4i))^2}\right)\\
&= 2\pi i \lim_{z\to -1+4i} \frac{-2}{(z-(-1-4i))^3}\\
&= 2\pi i \frac{-2}{(8i)^3} = \frac{-4\pi i}{-8^3 i} = \frac{\pi}{128}\,.
\end{aligned}
$$

In conclusione

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+2x+17)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{128}\,.
$$

(B): Per la formula di Eulero abbiamo $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$. Quindi

$$
\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\,.
$$

Indicando con α la circonferneza di centro 0 e raggio 1 orientata in senso antiorario, abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha \frac{1}{5+2z+\frac{2}{z}}\,\frac{\mathrm{d}z}{iz}\\
&= \frac{1}{i}\int_\alpha \frac{1}{5z+2z^2+2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\int_\alpha \frac{1}{2z^2+5z+2}\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{i}\int_\alpha \frac{1}{2(z-2)(z-\frac{1}{2})}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i}\int_\alpha \frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})}\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}
$$

Per il teorema dei residui e siccome $-\dfrac{1}{2}$ è l'unico polo della funzione meromorfa integranda contenuto nel cerchio unitario di centro 0, si ottiene

$$
\int_\alpha \frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})}\mathrm{d}z = Res\left(\frac{1}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}\,,\,\frac{1}{2}\right)
$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{1}{z+2} = 2\pi i\, \frac{2}{3} = \frac{4\pi i}{3}$$

(la terza uguaglianza è vera perché $-\dfrac{1}{2}$ è un polo semplice).
In conclusione

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2i}\,\frac{4\pi i}{3} = \frac{2\pi}{3}\,.$$