1. Compito geometria per ingegneria medica Trapani 10-09-2021 B

Esercizio 1

Sia Π il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y - 3z = 0$, e sia r la retta, sempre in $\mathbb{R}^3$, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Determinare l'equazione (parametrica o cartesiana a vostra scelta) della retta s contenuta in Π che interseca r e che passa per il punto di minima distanza tra Π e il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinare equazioni (parametriche o cartesiane) del piano contenente le due rette r ed s.

Esercizio 2

Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - ky \\ y + kz \\ -2y + z \end{pmatrix}$$

dove k e' un numero reale. Dire per quali valori di k, se esistono, l'applicazione f_k e' diagonalizzabile sui reali e per quali valori di k, se esistono, essa e' diagonalizzabile sui complessi.

Esercizio 3

Determinare una base di autovettori dell'applicazione $f_{-1/2} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dell'esercizio 2.

Esercizio 4

Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^4$, $\{v_1, v_2\}$ con

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

sia $W = span\{v_1, v_2\}$ determinare un base ortonormale di $W^\perp$. SOLUZIONI

Esercizio 1

Per trovare il punto di minima distanza tra il punto P di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e il piano Π dobbiamo trovare la retta r_1 perpendicolare a Π e passante per P. Tale retta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 2 \end{cases}$$

Il punto di minima distanza tra P e Π e' allora l'intersezione Q tra r_1 e Π, (teorema di Pitagora). Per trovare le coordinate di Q sostituiamo le equazioni parametriche di r_1 nelle equazioni cartesiane di Π ottenendo $(t+1) + 2(2t+1) - 3(-3t+2) = 0$, cioe' $t = 3/14$. Il punto Q ha quindi coordinate $\begin{pmatrix} 17/14 \\ 10/7 \\ 19/14 \end{pmatrix}$. Poi la retta s e' contenuta nel piano Π e interseca la retta r, quindi il punto dove queste due rette si intersecano deve stare in r ma deve stare pure in Π. Cioe' il punto di intersezione R di r ed s coincide con il punto di intersezione di r e Π. Sostituendo nelle equazioni cartesiane di Π le equazioni parametriche di r si trova $t + 2(2t - 1) - 3 = 0$. Cioe' $t = 1$, Quindi R ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La retta s e' allora la retta che passa per i punti r e Q, quindi s ha equazioni parametriche ad esempio (in notazione vettoriale) $X = t(R - Q) + R$. Il piano Π_1 contenente r ed s ha percio' equazioni parametriche ad esempio $X = t_1(R - Q) + t_2 v + R$, dove v e' il vettore direttore di r cioe' il vettore di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2

La matrice associata ad f_k rispetto alle basi canoniche sia in partenza che in arrivo e'

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 2k)$ le cui radici sono

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 + \sqrt{-2k}, \lambda_3 = 1 - \sqrt{-2k}.$$

Quindi le radici del polinomio caratteristico sono tutte reali se $k \geq 0$, e sono una reale e due complesse (non reali) se $k > 0$. D'altra parte $k = 0$ il polinomio caratteristico ha la radice 1 con molteplicita' 3, per $k \neq 0$ le radici sono distinte. Quindi se $k < 0$ e $k \neq 0$ gli autovalori sono tutti reali e distinti, l'applicazione f_k e' percio' diagonalizzabile sui reali. Se $k > 0$ le radici del polinomio caratteristico sono distinte ma non tutte reali, quindi in questo caso f_k e' diagonalizzabile sui complessi ma non sui reali. Resta da studiare il caso $k = 0$ In questo caso l'autovalore 1 ha molteplicita' algebrica 3. Ora

$$A_0 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango $r(A_0 - I)$ della matrice $A_0 - I$ e' 1, quindi la molteplicita' geometrica dell'autovalore 1 e' $3 - r(A_0 - I) = 2$. Ne segue che per $k = 0$ l'applicazione f_k non e' diagonalizzabile ne' sui reali ne' sui complessi.

Esercizio 3

Se nell'esercizio 2 poniamo $k = -1/2$ otteniamo gli autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Quindi gli autovalori sono reali e distinti ed hanno tutti molteplicita' algebrica e geometrica 1, quindi $f_{-1/2}$ e' diagonalizzabile sui reali (e anche sui complessi. Si vede subito che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' una base dell'autospazio di autovalore 1. Una base dell'autospazio di autovalore 0 e' il vettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e una base dell'autospazio di autovalore 0, e' il vettore $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ e' una base di autovettori dell'applicazione $f_{-1/2}$.

Esercizio 4

Lo spazio $W^\perp$ ha equazioni cartesiane $< X, v_1 >= 0, < X, v_2 >= 0$ cioe'

$$\begin{cases} x + y + 3z + w = 0 \\ x + 2y + 3w = 0 \end{cases}$$

Quindi $y = -2x - 6z, w = x + 3z$. Percio' sostituendo ai parametri liberi i valori 0 e 1 si vede che una base di $W^\perp$ e' ad esempio, $\{w_1, w_2\}$ con $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Per trovare una base ortonormale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di $W^\perp$ trovo prima una base ortogonale con l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Quindi $u_1 = w_1, u_2 = w_2 - \frac{<w_2,u_1>}{<u_1,u_1>} u_1$. Poi una base ortonormale $\{u_1', u_2'\}$ si ottiene ponendo $u_1' = \frac{u_1}{|u_1|}$, e $u_2' = \frac{u_2}{|u_2|}$. Dove per ogni vettore u in $\mathbb{R}^n$ abbiamo $|u| = \sqrt{< u, u >}$.