Facoltà di Ingegneria
Geometria ingegneria medica . Esame (21/07/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato** Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda

Giustificare le risposte

Cognome:	1			
	2			
Nome:	3			Versione A
	4			
	TOTALE			

1) DOMANDA FILTRO punti 6

Quali dei seguenti insieme e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e quale non lo e' ? Dare per ciascuno degli insieme che non sono sottospazi vettoriali almeno una propriet' dei sottospazi vettoriali che essi non hanno.

$$1)\ \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$$

$$2)\ \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + 2z = 0\}$$

$$3)\ \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \cup \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}.$$

(Ricordiamo che il simbolo $\cup$ e' il simbolo di unione di due insiemi).

Soluzione La risposta giusta e' la 2), infatti l'insieme 2) essendo l insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. L'insieme 1) non e' un sottospazio vettoriale perch' non contiene l'origine. Per quanto riguarda l'insieme 3) i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartengono entrambi all insieme 3), ma la loro somma, cio' il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ non appartiene all'insieme 3), l'insieme 3) percio' non e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. **2) Esercizio 2.** Punti 12

Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 3z \\ x + z \\ x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

Sia **b** la terna di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sia $\mathbf{b}^*$ la terna di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Provare che $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}^*$ sono basi di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata all'applicazione lineare L rispetto alle basi $\mathbf{b}$ di $\mathbb{R}^3$ in partenza e $\mathbf{b}^*$ di $\mathbb{R}^3$ in arrivo. Determinare una base del nucleo di L ed una base dell immagine di L. Soluzione Le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe determinante non nullo, ne segue che $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}^*$ sono basi di $\mathbb{R}^3$.

Per determinare la matrice associata ad L rispetto alle basi $\mathbf{b}$ in partenza e $\mathbf{b}^*$ in arrivo, calcoliamo $L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ Scriviamo

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

. Risolvendo il corrispondente sistema lineare troviamo $\alpha = \frac{13}{3}, \beta = \frac{5}{3}, \gamma = \frac{2}{3}$. Similmente $L \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ Scriviamo

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

. Risolvendo il corrispondente sistema lineare troviamo $a = 5, b = 1, c = 1$. In fine $L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$

Scriviamo come prima

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

. Risolvendo il corrispondente sistema lineare troviamo come prima $p = \frac{29}{3}, q = \frac{13}{3}, r = \frac{4}{3}$.

In conclusione la matrice associata ad L rispetto alle basi date e'

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{3} & 5 & \frac{29}{3} \\ \frac{5}{3} & 1 & \frac{13}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

. Il nucleo di L e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

. Cioe' $z = -x, y = 2x$, quindi se scegliamo x come parametro libero e poniamo $x = 1$ troviamo che una base del nucleo e' il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A associata ad L rispetto alla base canonica nell' $\mathbb{R}^3$ di partenza ed alla base canonica dell' $\mathbb{R}^3$ di arrivo (cioe' la matrice A tale che $L(X) = AX$) e' data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

. Le colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sono non proporzionali, quindi sono linearmente indipendenti. D'altra parte abbiamo visto sopra che il nucleo di L non e' ridotto al solo zero, quindi $det(A) = 0$. Ricordando quindi che l'immagine di L e' il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dalla colonne della matrice associata ad L rispetto alla base canonica in partenza ed alla base canonica in arrivo, troviamo che una base dell'immagine di L e' data dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

3 Esercizio 3 punti 8

Si consideri il piano Π di equazione $2x - y + z = 3$ in $\mathbb{R}^3$ e il punto p di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Provare che il punto p non appartiene a Π e determinare sia una equazione parametrica che una equazione cartesiana della retta r passante per p e ortogonale a Π. Soluzione Dato che $2 - 1 + 3 \neq 3$ il punto non appartiene al piano. Dall'equazione cartesiana di Π si vede che il vettore

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e' ortogonale a Π, quindi una equazione parametrica di r e' $X = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Se scriviamo questo come un sistema lineare di incognita t e termini noti espressi in termini di x, y e z troviamo il sistema $\begin{cases} 2t = x - 1 \\ -t = y - 1 \\ t = z - 3. \end{cases}$ che ridotto con l'eliminazione di Gauss diventa $\begin{cases} 2t = x - 1 \\ 0 = x + 2y - 3 \\ 0 = x - 2z + 5. \end{cases}$ La compatibilita' del sistema fornisce quindi le equazioni cartesiane della retta che sono $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0. \end{cases}$

4) Domanda delicata punti 6

Sia A una matrice 2×2 a coefficienti complessi, dimostrare che le seguenti propriet' sono equivalenti:

1) Il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ coincide con il polinomio λ^2
2) $A^2 = 0$

Suggerimento Di dimostri da prima che $A^2 = 0$ allora $P_A(\lambda) = \lambda^2$. Si osservi poi che se N e' una matrice due per due invertibile allora $P_A = P_{(N^{-1}AN)}$ e $(N^{-1}AN)^2 = N^{-1}(A^2)N$. Si scelga una base di $\mathbf{C}^2$ il cui primo vettore sia un autovettore di A e ...) Soluzione Supponiamo che $A^2 = 0$, se v e' un autovetture di A di autovalone λ allora $Av = \lambda v$ e quindi $A^2 v = \lambda^2 v = 0$, ma dato che $v \neq 0$ segue che $\lambda = 0$. In altri termini l unico autosalone di A e' l'autovalone 0, e quindi $P_A(\lambda) = \lambda^2$. Viceversa, se $P_A(\lambda) = \lambda^2$ l'unico autosalone di A e' l'autosalone 0, sia $\mathbf{b} = \{v_1, v_2\}$ una base di $\mathbf{C}^2$ nella quale v_1 sia un autovetture di A. Sia $L_A(X) = AX$ e sia A' la matrice associata all'applicazione lineare L_A rispetto alle basi $\mathbf{b}$ in partenza e $\mathbf{b}$ in arrivo. Esistono quindi numeri reali a e b tali che la matrice A' e' della forma

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

. Dato che l'unico autosalone e' 0 la traccia di A' deve essere nulla, cio' $b = 0 + b = 0$, cio

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Si vede con un conto diretto che $A'^2 = 0$. Ma essendo A' la matrice associata ad L_A rispetto ad una coppia di basi uguali in partenza e in arrivo, sappiamo che esiste una matrice 2×2 invertibile tale che $A' = N^{-1}AN$, quindi $N^{-1}(A^2)N = 0$ ed in fine $A^2 = 0$.