1. Compito geometria per ingegneria medica Trapani 10-09-2021A

Esercizio 1

Sia Π il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x+y-z=0$, e sia r la retta, sempre in $\mathbb{R}^3$, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t+1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Determinare l'equazione (parametrica o cartesiana a vostra scelta) della retta s contenuta in Π che interseca r e che passa per il punto di minima distanza tra Π e il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare equazioni (parametriche o cartesiane) del piano contenente le due rette r ed s.

Esercizio 2

Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -2y+z \\ ky+z \end{pmatrix}$$

dove k e' un numero reale. Dire per quali valori di k, se esistono, l'applicazione f_k e' diagonalizzabile sui reali e per quali valori di k, se esistono, essa e' diagonalizzabile sui complessi.

Esercizio 3

Determinare una base di autovettori dell'applicazione $f_{-1} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dell'esercizio 2,

Esercizio 4

Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^4$, $\{v_1, v_2\}$ con

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

sia $W = span\{v_1, v_2\}$ determinare un base ortonormale di $W^\perp$.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Per trovare il punto di minima distanza tra il punto P di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il piano Π dobbiamo trovare la retta r_1 perpendicolare a Π e passante per P. Tale retta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = -t+1 \end{cases}$$

Il punto di minima distanza tra P e Π e' allora l'intersezione Q tra r_1 e Π, (teorema di Pitagora). Per trovare le coordinate di Q sostituiamo le equazioni parametriche di r_1 nelle equazioni cartesiane di Π ottenendo $(t+1)+(t+1)-(-t+1)=0$, cioe'

$t=-1/3$. Il punto Q ha quindi coordinate $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$. Poi la retta s e' contenuta nel piano Π e interseca la retta r, quindi il punto dove queste due rette si intersecano deve stare in r ma deve stare pure in Π. Cioe' il punto di intersezione R di r ed s coincide con il punto di intersezione di r e Π. Sostituendo nelle equazioni cartesiane di Π le equazioni parametriche di r si trova $t+(3t+1)-2=0$. Cioe' $t=1/4$, Quindi R ha coordinate $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 7/4 \\ 2 \end{pmatrix}$. La retta s e' allora la retta che passa per i punti r e Q, quindi s ha equazioni parametriche ad esempio (in notazione vettoriale) $X=t(R-Q)+R$. Il piano Π_1 contenente r ed s ha percio' equazioni parametriche ad esempio $X=t_1(R-Q)+t_2v+R$, dove v e' il vettore direttore di r cioe' il vettore di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2

La matrice associata ad f_k rispetto alle basi canoniche sia in partenza che in arrivo e'

$$A_k=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $P_A(\lambda)=(1-\lambda)((-2-\lambda)(1-\lambda)-k)=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-k-2)$, le cui radici sono

$$\lambda_1=1, \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{9+4k}}{2}, \lambda_3=\frac{-1+\sqrt{9+4k}}{2}$$

Quindi le radici del polinomio caratteristico sono tutte reali se $k\geq -9/4$, e sono una reale e due complesse (non reali) se $k<-9/4$. D'altra parte $\frac{-1-\sqrt{9+4k}}{2}$, non e' mai uguale ad 1, mentre $\frac{-1+\sqrt{9+4k}}{2}=1$ se e solo se $k=0$. Quindi se $k>-9/4$ e $k\neq 0$ gli autovalori sono tutti reali e distinti, l'applicazione f_k e' percio' diagonalizzabile sui reali. Se $k<-9/4$ le radici del polinomio caratteristico sono distinte ma non tutte reali, quindi in questo caso f_k e' diagonalizzabile sui complessi ma non sui reali. Resta da studiare i casi $k=-9/4$ e $k=0$. Nel caso $k=-9/4$ ci sono tre radici del polinomio caratteristico coincidenti e uguali a 1, quindi l'autovalore 1 ha molteplicita' algebrica 3. Ora

$$A_{-9/4}-I=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -9/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango $r(A_{-9/4}-I)$ della matrice $A_{-9/4}-I$ e' 2, quindi la molteplicita' geometrica dell'autovalore 1 e' $3-r(A_{-9/4}-I)=1$. Ne segue che per $k=-9/4$ l'applicazione f_k non e' diagonalizzabile ne' sui reali ne' sui complessi. Se $k=0$, l'autovalore 1 ha molteplicita' algebrica 2 (l'altro autovalore e' -2). Il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e' ancora 2 e la molteplicita' geometrica dell'autovalore 1 per $k = 0$ e' ancora 1. Percio' anche nel caso $k = 0$ l'appplicazione f_k non e' diagonalizzabile ne' sui reali ne' sui complessi.

Esercizio 3

Se nell'esercizio 2 poniamo $k = -1$ otteniamo gli autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Quindi gli autovalori sono reali e distinti ed hanno tutti molteplicita' algebrica e geometrica 1, quindi f_{-1} e' diagonalizzabile sui reali (e anche sui complessi. Si vede subito che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' una base dell'autospazio di autovalore 1. Una base dell'autospazio di autovalore $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, e' il vettore $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ e una base dell'autospazio di autovalore $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, e' il vettore $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$. Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ e' una base di autovettori dell'applicazione f_{-1}.

Esercizio 4

Lo spazio $W^\perp$ ha equazioni cartesiane $< X, v_1 >= 0, < X, v_2 >= 0$ cioe'

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + 3w = 0 \end{cases}$$

Quindi $z = -2/3x - 1/3y, w = -1/3x - 2/3y$. Percio' sostituendo ai parametri liberi i valori 0 e 1 si vede che una base di $W^\perp$ e' ad esempio, $\{w_1, w_2\}$ con $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Per trovare una base ortonormale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di $W^\perp$ trovo prima una base ortogonale con l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Quindi $u_1 = w_1, u_2 = w_2 - \frac{<w_2,u_1>}{<u_1,u_1>} u_1$. Poi una base ortonormale $\{u_1', u_2'\}$ si ottiene ponendo $u_1' = \frac{u_1}{|u_1|}$, e $u_2' = \frac{u_2}{|u_2|}$. Dove per ogni vettore u in $\mathbb{R}^n$ abbiamo $|u| = \sqrt{< u, u >}$.