Compito scritto Piu' variabili complesse Trapani 18.7.13

Soluzioni

Esercizio 1

Sia D un dominio di Reinhardt in $\mathbf{C}^N$ che sia di olomorfia e che non intersechi nessuno degli assi $\{z_i = 0\}$, provare che D e' logaritmicamente convesso

Suggerimento

Si ricordi la struttura dei tubi connessi di omomorfia, e si costruisca una opportuna mappa olomorfa da $\mathbf{C}^N$ in se' tale che la controimmagine di D sia un tubo connesso.

SOLUZIONE

Si consideri la mappa $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, data da $f(z_1, \dots z_n) = (e^{z_1}, \dots e^{z_n})$. Poiche' D e' un dominio di Reinhardt l'aperto $f^{-1}(D)$ e' un tubo, cioe' $Z \in f^{-1}(D),\ X \in \mathbf{R}^n$ implica $Z + iX \in f^{-1}(D)$. Vediamo che $f^{-1}(D)$ e' connesso. Siano p e q in $f^{-1}(D)$, e sia γ un cammino continuo in D che collega $f(p)$ con $f(q)$. Poiche' f e' un rivestimento esiste un camino continuo γ' in $f^{-1}(D)$ che parte da p e che e' un sollevamento di γ, sia q' il punto finale di γ', si ha $q = q' + 2i\mathbf{k}\pi$ con $\mathbf{k}$ in $\mathbf{Z}^n$. La curva $t \to q' + 2it\mathbf{k}\pi$ $t \in [0, 1]$ collega q' con q ed e' tutta contenuta in $f^{-1}(D)$. Dato che f e' definita sul dominio di olomorfia $\mathbf{C}^n$ e D e' di olomorfia anche $f^{-1}(D)$ lo e' ed essendo un tubo, sappiamo che $f^{-1}(D)$ e' convesso, dato che la mappa parte reale da $\mathbf{C}^n$ in $\mathbf{R}^n$ e' lineare segue che l'immagine di D mediante la mappa $(z_1, \dots z_n) \to (\log |z_1|, \dots \log |z_n|)$ e' convessa.

Esercizio 2

Sia Σ un sottospazio affine di $\mathbf{C}^n$ di dimensione $n-2$ Si provi che per $n \geq 2$ si ha $H^{0,1}(\mathbf{C}^n \setminus \Sigma) \neq 0$.

Suggerimento

Si ricordi come si e' ottenuta la soluzione del problema di Levi a partire dalla risolubilita' dell'equazione $\bar{\partial} u = f$ in domini pseudoconvessi e si usi il teorema di estensione di Riemann

SOLUZIONE Con un cambio di coordinate affini si pu' supporre che $\Sigma = \{z_1 = z_2 = 0\}$. Sia $\Omega = \mathbf{C}^n \setminus \Sigma$, e sia $\Sigma' = \{z_1 = 0\}$. Se fosse $H^{0,1}(\Omega) = 0$ per ogni funzione f olomorfa su $\Sigma' \cap \Omega = \Sigma' \setminus \Sigma$ esisterebbe una funzione olomorfa F su Ω che estende f. Per il teorema di estensione di Riemann una tale F si estenderebbe olomorfa a tutto $\mathbf{C}^2$. La restrizione di quest'ultima mappa a Σ' darebbe una estensione olomorfa di f a tutto Σ'. Ma la funzione $f = 1/z_2$ e' olomorfa su $\Sigma' \setminus \Sigma$ e non si estende a tutto Σ'.

Esercizio 3

Sia P un polidisco aperto di centro 0 in $\mathbf{C}^2$, si provi che ogni funzione olomorfa su $(\mathbf{C}^2 \setminus \{z_2 = 0\}) \cup P$ si estende olomorfa a tutto $\mathbf{C}^2$.

Suggerimento

Si usino opportuni cappelli di Hartogs.

SOLUZIONE

Il polidisco P contiene il polidisco $P' = \{|z_1| < a\ |z_2| < a\}$ per qualche numero positivo a. Per il principio di prolungamento analitico posso supporre $P = P'$. Poniamo $\Omega = \mathbf{C}^2 \setminus \{z_2 = 0\} \cup P$. Per N intero positivo maggiore di a, sia $\Delta(N)_1 = \{|z_1| < N, a/2 < |z_2| < a\}$, l'aperto $\Delta(N)_1 \cup P$ e' un cappello di Hartogs contenuto in Ω il cui completamento e' $\Delta(N)_2 = \{|z_1| < N, |z_2| < a\}$. Data f olomorfa su Ω e dati $N < M$ interi le funzioni f_N f_M che sono estensioni olomorfe a $\Delta(N)_2$ e $\Delta(M)_2$ della restrizione di f a $\Delta(N)_1 \cup P$ e $\Delta(M)_1 \cup P$ rispettivamente, coincidono per prolungamento analitico, incollando tutte le f_N e l'originaria f si trova l'estensione voluta.