

Compito di Geometria per ingegneria medica

Trapani 4-2-2019 compito C

February 3, 2019

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} (1 - \alpha)x + y - \alpha z = \alpha^2 \\ (\alpha - 1)x + \alpha y - z = 1 \\ y - \alpha z = \alpha \end{cases}$$

dipendente dal parametro reale α .

Determinare per quali valori del parametro α il sistema è compatibile.

Determinare per ogni tale α la dimensione dello spazio affine delle soluzioni del sistema. Per i valori di α (se esistono) per i quali la dimensione dello spazio delle soluzioni è strettamente positiva, determinare esplicitamente equazioni parametriche dello spazio delle soluzioni.

Esercizio 2

Si consideri nello spazio a tre dimensioni la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare equazioni cartesiane del piano Π ortogonale ad r e passante per il punto P di coordinate $(1, 1, 1)$.

Provare che il punto Q di coordinate $(1, 2, 1)$ appartiene alla retta r .

Determinare equazioni parametriche della retta r_1 passante per P e Q .

Determinare equazioni cartesiane del piano contenente le rette r ed r_1 .

Esercizio 3 Sia $V(k)$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di una variabile di grado minore o uguale a 3. Sia $L : V(2) \rightarrow V(4)$ l'applicazione definita da $L(P) = x^2P + xP(2) - P(0)$.

Provare che L è lineare, determinare una base di $\text{Ker}(L)$.

Determinare la dimensione dell'immagine di L .

Determinare la matrice associata ad L rispetto alle basi

$\{1, x, x^2\}$ su $V(2)$ e $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ su $V(4)$.

SOLUZIONI COMPITO GEOMETRIA
IN GEOMETRIA ANALITICA (TRAPPANI) C.
ESERCIZIO 1C

1C
4-2-19

MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 1 & -\alpha & \alpha^2 \\ \alpha-1 & \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha & \alpha \end{array} \right)$$

A b

$$\det A = (1-\alpha) \det \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \alpha-1 & -1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} - \alpha \det \begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(1-\alpha)(-\alpha^2+1) + \alpha(\alpha-1) - \alpha(\alpha-1), \quad \det A = 0 \Leftrightarrow$$

$\alpha = 1$ oppure $\alpha = -1$. Per $\alpha = 1$ LA MATRICE DIVENTA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{Quindi } r_k(A) = r_k(A|b) = 1.$$

Dimensione dello spazio delle soluzioni $3-1=2$.

Il sistema ha 3 equazioni uguali $y-z=1$

$z = y-1$ PARAMETRI LIBERI x, z .

Soluzioni particolari $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Base dello

spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato $\{y-z=0\}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, EQUAZIONE

PARAMETRICA DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI:

$$X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{PER } \alpha = -1 \text{ LA}$$

~~ESERCIZIO 2~~ MATRICE DIVENTA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

DALLE PRIME DUE RIGHE DELLA MATRICE SI VEDE CHE PER $\alpha = -1$ IL SISTEMA È

INCOMPATIBILE. Se $\det A \neq 0$ cioè se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ IL SISTEMA AMMETTE UNA ED UNA SOLA SOLUZIONE, QUINDI LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 2 c.

2-C- 4-2-19

CE RICHIAMO UN VETTORE DIRETTORE DI η , CIOE' UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO

$$\begin{cases} x+2y-5z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \quad z=y-x$$

$$x+2y-5(y-x)=6x-3y=0 \Rightarrow y=2x, z=x$$

base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, FASCIO DEI PIANI ORTOGONALI AD η .

$x+2y+z+d=0$. IMPONENDO IL PASSAGGIO DEL P

SI TROVA $d=-4$, π HA EQUAZIONE $x+2y+z-4=0$.

$1+4-5=0 \Rightarrow 4 \in \eta$. EQUAZIONI PARAMETRICHE DI η ,
 $1-2+1=0$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioe' } X = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DEL PIANO CONTENENTE

~~IL~~ 60η , SONO $X = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, CORRISPONDENTE

AL SISTEMA $\begin{cases} s = x-1 \\ -t+2s = y-2 \\ s = z-1 \end{cases}$ CON MATRICE $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ -1 & 2 & y-2 \\ 0 & 1 & z-1 \end{pmatrix}$

CHE RIDOTTO CON GAUSS DIVENTA $\begin{pmatrix} -1 & 2 & y-2 \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 1 & z-1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & y-2 \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & z-x \end{pmatrix}$ QUINDI UNA EQUAZIONE
 CARTESIANA DEL PIANO E' $z-x=0$

PER CALCOLARE L'EQUAZIONE CARTESIANA DI π
 SI SAREBBE POTUTO OTTENERE UN VETTORE
 DIRETTORE DI π ANCHE FACENDO $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 (PRODOTTO VETTORIALE).

30 4-2-19

Esercizio 2, 3

$$L(P+Q) = x^2(P+Q) + x(P+Q)(2) - (P+Q)(0) =$$

$$(\cancel{x^2}P + xP(2) - P(0)) + (x^2 + xQ(2) - Q(0)) = L(P) + L(Q)$$

$$L(\lambda P) = \lambda P + x\lambda P(2) - \lambda P(0) = \lambda(P + xP(2) - P(0)) = \lambda L(P)$$

Quindi: $L \in \text{Lineare}$. Se $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$L(P) = x^2(a_0 + a_1x + a_2x^2) + x(a_0 + 2a_1 + 4a_2) - a_0 =$$

$$a_2x^4 + a_1x^3 + a_0x^2 + (a_0 + 2a_1 + 4a_2)x - a_0$$

$$\text{Ker } L = \{P : L(P) = 0\} = \{0\}, \text{ Ker } L = 0$$

$$\dim \text{Im } L + \dim \text{Ker } L = 3 \Rightarrow \dim \text{Im } L = 3$$

$$L(1) = x^2 \cdot 1 + x \cdot 1 - 1 = x^2 + x - 1$$

$$L(x) = x^2 \cdot x + x \cdot 2 - 0 = x^3 + 2x$$

$$L(x^2) = x^2 \cdot x^2 + x \cdot 4 - 0 = x^4 + 4x$$

Quindi: LA MATRICE ASSOCIATA È

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$