

Compito di Geometria per ingegneria medica A

Trapani 4-2-2019

February 3, 2019

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + \alpha y - \alpha z = \alpha \\ \alpha x + y - z = \alpha^2 \\ x + y - \alpha z = \alpha^3 \end{cases}$$

dipendente dal parametro reale α .

Determinare per quali valori del parametro α il sistema è compatibile,

Determinare per ogni tale α la dimensione dello spazio affine delle soluzioni del sistema

Per i valori di α (se esistono) per i quali la dimensione dello spazio delle soluzioni è strettamente positiva, determinare esplicitamente equazioni parametriche dello spazio delle soluzioni

Esercizio 2

Si consideri nello spazio a tre dimensioni la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 3z = -3 \end{cases}$$

Determinare equazioni cartesiane del piano Π ortogonale ad r e passante per il punto P di coordinate $(1, 1, 1)$.

Provare che il punto Q di coordinate $(0, 0, -1)$ appartiene alla retta r .

Determinare equazioni parametriche della retta r_1 passante per P e Q .

Determinare equazioni cartesiane del piano contenente le rette r ed r_1 .

Esercizio 3

Sia $V(k)$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di una variabile di grado minore o uguale a 3. Sia $L : V(2) \rightarrow V(3)$ l'applicazione definita da $L(P) = x(P - P(0)) + P(1) - P(2)$.

Provare che L è lineare, determinare una base di $\text{Ker}(L)$,

Determinare la dimensione dell'immagine di L .

Determinare la matrice associata ad L rispetto alle basi

$\{1, x, x^2\}$ su $V(2)$ e $\{1, x, x^2, x^3\}$ su $V(3)$.

I-A 4-2-19

Esercizio 1A

MATRICE DEL SISTEMA

$$\begin{array}{c} A \quad b \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & -1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & -\alpha & \alpha^3 \end{array} \right) \\ \hline \text{INCOGNITE} \\ \hline \text{COMPLETE} \end{array}$$

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} - \alpha \det \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} + \alpha \det \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$1(-\alpha + 1) - \alpha(-\alpha^2 + 1) + \alpha(\alpha - 1) = (\alpha - 1)(-1 + \alpha + \alpha^2) =$$

$$(\alpha - 1)(-1 + \alpha^2). \text{ Quindi } \det A = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ oppure } \alpha = -1.$$

PERCÌ SE $\alpha \neq 1$ $\alpha \neq -1$ IL RANGO DI A È 3 E IL RANGO DI $(A|b)$ È 3, NE SEGUE CHE PER OGNI $\alpha \neq 1$ $\alpha \neq -1$ IL SISTEMA È

CONDIVIBILE ED AMMETTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE.

PER $\alpha \neq 1$ $\alpha \neq -1$ LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È QUINDI UGUALE A 0. SE $\alpha = 1$

$$\text{IL RANGO DI } (A|b) = 1. \text{ IL SISTEMA È CONDIVIBILE,}$$

LO SPAZIO DELLE SUE SOLUZIONI HA DIMENSIONE $3 - 1 = 2$, LE TRE EQUAZIONI DEL SISTEMA SONO TUTTE UGUALI

E SI OTTIENE L'UNICA EQUAZIONE $x + y - z = 1$.

REDUCENDO CON L'ELIMINAZIONE DI GAUSS SI OTTIENE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ L'UNICO PIVOT } p_1 = 1, \text{ PARAMETRI LIBERI } y = z.$$

~~SOLUZIONE PARTICOLARE~~ $x = -y + z + 1, y = y, z = z$. SOLUZIONE PARTICOLARE

$y = z = 0$ SI TROVA $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO

$x + y - z = 0$, BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO $y = 1, z = 0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y = 0, z = 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ EQUAZIONI

PARAMETRI CHE DEDUCONO SPAZIO DELLE SOLUZIONI

$$\begin{cases} x = 2s + 1 \\ y = t \\ z = s \end{cases} \text{ cioè } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2A 4-2-19

ESERCIZIO 1 COMPITO A CONTINUAZIONE PER $x = -1$

$$(A)b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad R. \text{ DUCENDO CON GAUSS}$$

$$\text{TROVANO} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rk}(A) = \text{rk}(A)b) = 2$. SISTEMA COMPATIBILE,
DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI $3-2=1$.

IL SISTEMA DIVENTA $\begin{cases} x-y+z = -1 \\ 2y = 0 \end{cases}$ PRESENTANDO
LIBERO ~~2~~ ~~3~~.

$y=0$, $x = -z-1$. SOLUZIONI PARTICOLARI $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO $\begin{cases} x-y+z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$

BASE $z=1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. EQUAZIONE PARAMETRICA

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ COE' } \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

ESERCIZIO 2A

UN VETTORE DIRETTORE DELLA RETTA r E' UNA SOLUZIONE
NON NULLA DEL SISTEMA LINEARE $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$

$$z = x+y, \quad x-y+3(x+y)=0 \Rightarrow 4x+2y=0, \quad y = -2x,$$

$z = -x$. VETTORE DIRETTORE DELLA RETTA r E' $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

IL FASCIO DI PIANI ORTOGONALI AD r E'
 $x-2y-z+d=0$, IL PASSAGGIO PER P IMPONE
 $d = +1, \quad 0+0+1=1$

$$0+0+3(-1)=-3 \Rightarrow Q \in r.$$

3A 4-2-19

La retta π_1 passante per $P \in \mathbb{Q}$ ha equazioni

Vettore direzione $X = t(P - Q) + Q$ cioè

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{il piano contenente le}$$

rette π ed π_1 ha equazioni parametriche (H)

$$X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} t + s = x \\ t - 2s = y \\ 2t - s = z + 1 \end{cases}$$

con matrice del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \\ 2 & -1 & z+1 \end{pmatrix}$

Riducendo con Gauss si trova $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-x \\ 0 & -3 & 2x+z+1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-x \\ 0 & 0 & -2x+z+1+y-x \end{pmatrix}$$

Equazioni cartesiane del

piano contenente π ed π_1 sono quindi

$$-x + y + z = 0$$

Esercizio 3

$$\begin{aligned} L(P+Q) &= x(P+Q) - (P+Q)(0) + (P+Q)(1) - (P+Q)(2) = \\ &= (xP - P(0) + P(1) - P(2)) + (xQ + Q(0) + Q(1) - Q(2)) \\ &= L(P) + L(Q). \quad L(\lambda P) = x(\lambda P) - (\lambda P)(0) + (\lambda P)(1) - \\ &= \lambda P - \lambda P(0) + \lambda P(1) - \lambda P(2) = \lambda(P - P(0) + P(1) - P(2)) \\ &= \lambda L(P). \quad \text{Quindi } L \text{ è lineare.} \end{aligned}$$

4A 4-2-19

Sia $L \in \text{Hom}(V, V)$ con $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $P(0) = a_0$, troviamo

$$L(P) = x(a_1x + a_2x^2) + (a_0 + a_1 + a_2) - (a_0 + 2a_1 + a_2x^2) =$$

$$a_2x^3 + a_1x^2 + 0x - a_1 - 3a_2. \quad L(P) = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0, a_1 = 0 \Rightarrow$$

$\text{Ker } L = \text{span}\{1\}$, quindi il polinomio costante 1 è

una base di $\text{Ker } L$. $\dim \text{Ker } L = 1$, $\dim \text{Im } L + \dim \text{Ker } L = 3$

$\Rightarrow \dim \text{Im } L = 2$. Notiamo che se P è il polinomio

costante c , $P(0) = P(1) = c$. Quindi $L(1) = x \cdot 0 + 1 - 1 = 0$

$$L(x) = x \cdot x + 1 - 2 = x^2 - 1, \quad L(x^2) = x \cdot x^2 + 1 - 4 = x^3 - 3$$

Quindi la matrice associata ad L rispetto alle

basi $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$