Facoltà di Ingegneria
Geometria. Esame (02/9/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda**

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione B

1) DOMANDA FILTRO punti 6 Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo dove A e' una matrice $m \times n$ e X e' un vettore colonna di $\mathbb{R}^n$, una ed una sola delle seguenti affermazioni e' quella giusta , quale?

1) Se $m > n$ esiste sempre almeno una soluzione non nulla del sistema lineare
2) Se $m < n$ esiste sempre almeno una soluzione non nulla del sistema lineare
3) Se $m = n$ esiste sempre almeno una soluzione non nulla del sistema lineare

Soluzione La risposta giusta e' la 2

Esercizio 2. Punti 9 Si consideri la quadrica in $\mathbb{R}^3$ di equazione $z = x^2 - y^2$. Descrivere la famiglia di piani per l'origine per i quali la conica intersezione della quadrica data con il piano risulta una conica degenere e descrivere al variare dei piani di quale conica si tratta. Suggerimento Conviene scrivere i vari piani nella forma $z = px + qy$ oppure $y = px$ oppure $x = 0$.

Soluzione Distinguiamo i tre casi: Caso 1) piano $x = 0$, l'intersezione del piano $x = 0$ con la quadrica produce la conica (nel piano delle y, z) di equazione $z = -y^2$, questa conica e' una parabola e non e' quindi degenere. Caso 2) piano $y = px$, l'intersezione del piano $y = px$ con la quadrica produce la conica (nel piano delle x, z) di equazione $z = (1 - p^2)x^2$ Se $1 - p^2 \neq 0$ questa conica e' una parabola che non e' degenere, se $1 - p^2 = 0$ questa conica e' una retta doppia che e' degenere. Caso 3) piano $z = px + qy$, l'intersezione del piano $z = py + qy$ con la quadrica produce la conica (nel piano delle x, y) di equazione $x^2 + y^2 - px - qy = 0$. La matrice completa di questa conica e'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p/2 \\ 0 & -1 & -q/2 \\ -p/2 & -q/2 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante e' $p^2 - q^2 - 1$. Il determinante della matrice completa e' quindi $(p^2 - q^2)/4$. Il determinante della matrice della parte quadratica e' invece -1. Cioe' per ogni coppia di numeri p, q tali che $p^2 - q^2 = 0$ l'intersezione della quadrica con il piano $z = px + qy$ produce una coppia di rette reali e distinte che si intersecano in un punto. (Non era richiesto nell'esercizio di descrivere tutte le coniche non degeneri ottenute intersecando i vari piani con la quadrica data).

Esercizio 3. Punti 9 Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $L(X) = AX$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si considerino le coppie di vettori $\beta = \{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ e $\beta' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Provare che β e β' sono basi in $\mathbb{R}^2$ e determinare la matrice associata ad L rispetto alla base β in partenza e β' in arrivo. Soluzione Si ha $det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 7 \neq 0$ e che $det \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -11 \neq 0$ quindi β e β' sono basi.

Per calcolare la matrice associata ad L rispetto alle basi date calcolo da prima $L \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$, poi scrivo

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Risolvo il corrispondente sistema lineare e trovo $x = 45/11, y = 9/11$. Poi calcolo $L \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, poi scrivo

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Risolvo il corrispondente sistema lineare e trovo $x' = 20/11, y' = 4/11$. La matrice associata all'applicazione lineare L rispetto alla coppia di basi date e' quindi

$$\begin{pmatrix} 45/11 & 20/11 \\ 9/11 & 4/11 \end{pmatrix}.$$

4) Domanda delicata punti 6 Provare che i due fatti seguenti per una matrice simmetrica reale A $n \times n$ sono equivalenti

1) Tutti gli autovalori di A sono reali non negativi
2) Esiste una matrice reale simmetrica B tale che $B^2 = A$.

Si ricordi che con B^2 si indica la matrice BB. Soluzione Se $A = B^2$ e $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sono gli autovalori di B, allora esiste per ogni j tra 1 ed n esiste un vettore non nullo X_j di $\mathbb{R}^n$ tale che $BX_j = \lambda_j X_j$ quindi $B^2 X_j = B(BX_j) = B(\lambda_j X_j) = \lambda_j B X_j = \lambda_j^2 X_j$.Quindi $\lambda_1^2, \dots \lambda_n^2$ sono gli autovalori di A. Dato che A e' simmetrica i numeri $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sono reali e quindi $\lambda_1^2, \dots \lambda_n^2$ sono reali non negativi. Viceversa supponiamo che $\mu_1, \dots \mu_n$ siano reali non negativi e siano gli autovalori di A. Per il teorema spettrale esiste una matrice ortogonale O tale che $A = O^{-1} \Lambda O$ dove Λ e' la matrice diagonale con sulla diagonale i numeri $\mu_1, \dots \mu_n$. Indichiamo con $\sqrt{\Lambda}$ la matrice diagonale con sulla diagonale i numeri $\sqrt{\mu_1}, \dots \sqrt{\mu_n}$. Sia $B = O^{-1} \sqrt{\Lambda} O$. Allora $B^2 = (O^{-1} \sqrt{\Lambda} O O^{-1} \sqrt{\Lambda} O) = O^{-1} \Lambda O = A$. Inoltre essendo O ortogonale abbiamo che $O^{-1} = O^t$ quindi $B = O^{-1} \sqrt{\Lambda} O = O^t \sqrt{\Lambda} O$ e $B^t = (O^t \sqrt{\Lambda} O)^t = O^t (\sqrt{\Lambda})^t O = O^t \sqrt{\Lambda} O = B$ cioe' la matrice B e' simmetrica.