FACOLTÀ DI INGEGNERIA
GEOMETRIA. ESAME (02/9/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda**

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione A

1) DOMANDA FILTRO punti 6 Sia $L : V \to W$ una applicazione lineare tra sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$, una ed una sola delle seguenti identita' e' sempre vera, quale?

$$\begin{array}{ll} 1) & dimKerL + dimImmL = dimV \\ 2) & dimKerL + dimImmL = dimW \\ 3) & dimKerL + dimImmL = dimV + dimW \end{array}$$

Soluzione La risposta giusta e' la 1)

Esercizio 2. Punti 9 Si consideri la quadrica in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, Descrivere la famiglia di piani per l'origine per i quali la conica intersezione della quadrica data con il piano risulta una conica degenere e descrivere al variare dei piani di quale conica si tratta. Suggerimento Conviene scrivere i vari piani nella forma $z = px + qy$ oppure $y = px$ oppure $x = 0$.

Soluzione Distinguiamo i tre casi: Caso 1) piano $x = 0$, l'intersezione del piano $x = 0$ con la quadrica produce la conica (nel piano delle y, z) di equazione $z^2 - y^2 = 1$, questa conica e' una iperbole e non e' quindi degenere. Caso 2) piano $y = px$, l'intersezione del piano $y = px$ con la quadrica produce la conica (nel piano delle x, z) di equazione $(1 - p^2)x^2 + z^2 = 1$. Se $1 - p^2 > 0$ questa conica e' una ellisse reale che non e' degenere, se $1 - p^2 < 0$ questa conica e' una iperbole che non e' degenere, se $1 - p^2 = 0$ la conica ha equazione $z^2 = 1$ cioe' $(z + 1)(z - 1) = 0$ che e' una coppia di rette reali parallele e distinte ed e' degenere. Caso 3) piano $z = px + qy$, l'intersezione del piano $z = py + qy$ con la quadrica produce la conica (nel piano delle x, y) di equazione $(1+p^2)x^2 + (q^2-1)y^2 + 2pqxy - 1 = 0$. La matrice completa di questa conica e'

$$\begin{pmatrix} 1 + p^2 & pq & 0 \\ pq & (q^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante e' $p^2 - q^2 - 1$. Cioe' per ogni coppia di numeri p, q tali che $p^2 - q^2 - 1 = 0$ l'intersezione della quadrica con il piano $z = px + qy$ produce una conica degenere. Inoltre dato che la conica non ha termini di primo grado per ridurla in forma canonica metrica non e' necessario fare traslazioni e se $p^2 - q^2 - 1 = 0$ la conica in forma canonica ha equazione $\lambda x'^2 = 1$. Dato che la traccia della matrice incompleta e' $p^2 + q^2$ che nel nostro caso coincide con $2q^2 + 1 > 0$, ne segue che il coefficiente λ e' positivo e la conica e' una coppia di rette reali distinte e parallele. (Non era richiesto nell'esercizio di descrivere tutte le coniche non degeneri ottenute intersecando i vari piani con la quadrica data).

Esercizio 3. Punti 9 Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $L(X) = AX$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si considerino le coppie di vettori $\beta = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ e $\beta' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Provare che β e β' sono basi in $\mathbb{R}^2$ e determinare la matrice associata ad L rispetto alla base β in partenza e β' in arrivo. Soluzione Si ha $det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ e che $det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -14 \neq 0$ quindi β e β' sono basi.

Per calcolare la matrice associata ad L rispetto alle basi date calcolo da prima $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, poi scrivo

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Risolvo il corrispondente sistema lineare e trovo $x = 6/7, y = 3/7$. Poi calcolo $L\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, poi scrivo

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Risolvo il corrispondente sistema lineare e trovo $x' = 3/7, y' = 5/7$. La matrice associata all'applicazione lineare L rispetto alla coppia di basi date e' quindi

$$\begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 \\ 3/7 & 5/7 \end{pmatrix}.$$

4) Domanda delicata punti 6 Siano v e w vettori in $\mathbb{R}^3$, sia

$$B = \begin{pmatrix} <v,v> & <v,w> \\ <w,v> & <w,w> \end{pmatrix}.$$

Provare che $|v \wedge w|^2 = det(B)$. Dove $v \wedge w$ indica il prodotto vettoriale dei vettori v e w mentre $< >$ indica il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^3$. Suggerimento Ricordare che $|v \wedge w|$ coincide con l'area del poligono individuato dai vettori v e w, la quale a sua volta coincide con il valore assoluto del determinante della matrice che ha per colonne i vettori v e w. Basta allora ricordare la definizione del prodotto scalare canonico, la definizione di matrice trasposta e la definizione del prodotto di matrici. ATTENZIONE Il suggerimento e' sbagliato. Mio errore stupido infatti non si pu fare il determinante di matrici $3x2$. (Ho tenuto conto di questo mio errore durante la correzione). D'altra parte il risultato e' vero. Soluzione

Il determinante di B e' $<v,v><w,w> - <v,w>^2 = |v|^2|w|^2(1 - cos(\theta)^2) = |v|^2|w|^2 sen(\theta)^2 =$ (Area del poligono generato da v e $w)^2 = |v \wedge w|^2$. Dove θ e' l'angolo compreso tra v e w.