2014

Trapani

Dispensa di Geometria,

1 Iperquadriche

Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$, non nulla, sia b un vettore colonnna in $\mathbf{R}^n$ e sia $c \in \mathbf{R}$. L'insieme delle soluzioni in $\mathbf{R}^n$ dell'equazione

$$X^t AX + X^t b + c = 0$$

si dice iperquadrica.

Le iperquadriche in $\mathbf{R}^2$ si chiamano coniche, le iperquadriche in $\mathbf{R}^3$ si chiamano quadriche. Consideriamo la matrice A^*, $(n+1) \times (n+1)$ data da

$$A^* = \begin{pmatrix} A & \frac{b}{2} \\ \frac{b^t}{2} & c \end{pmatrix}.$$

detta matrice completa della iperquadrica. L'iperquadrica si dice non degenere se $det A^* \neq 0$ e si dice degenere altrimenti. Notiamo che l'equazione dell'iperquadrica si puo' scrivere nella forma

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}^t A^* \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se in una iperquadrica $X^t AX + b^t X + c = 0$ facciamo la sostituzione $X = OY + v$ con O ortogonale otteniamo l' iperquadrica $Y^t A'Y + b'^t Y + c' = 0$. se in fine dato un numero reale non nullo ρ sostituiamo c' con $\rho c,'$ b' con $\rho b'$ ed A' con $\rho A'$ abbiamo moltiplicato per ρ ogni termine dell'equazione ed il luogo di zeri non e' cambiato. In conclusione la nuova equazione dell'iperquadrica si ottiene dall' equazione originale con uno spostamento rigido di $\mathbf{R}^n$, (applicazione della trasformazione $X = OY + v$ con O ortogonale) e un riscalamento (moltiplicazione per ρ). Due iperquadriche ottenute l'una dall'altra in questo modo le chiameremo metricamente equivalenti. Vogliamo provare che ogni iperquadrica si puo' trasformare in una forma semplice (forma canonica metrica) ad essa metricamente equivalente. Se invece poniamo $X = NY + v$ con N matrice $n \times n$ invertibile e moltiplichiamo l'equazione ottenuta per un numero ρ non nullo otteniamo una nuova equazione che chiameremo affinemente equivalente alla precedente, vedremo che anche in questo caso possiamo scegliere N, ρ e v in modo da trasformare l'equazione in una forma semplice detta forma canonica affine dell'iperquadrica. Cerchiamo da prima di vedere quali quantita' restano inalterate nel passaggio dall equazione originale $X^t AX + b^t X + c = 0$ dopo il cambiamento di coordinate $X = NY + v$ e la moltiplicazione dell'equazione per la costante non nulla

ρ. Tali quantita' vengono dette invariati affini dell iperquadrica. Dalla formula (**??**) segue che nel cambiamento di coordinate $X = NY + v$ la matrice A si trasforma nella matrice N^tAN e la matrice A^* si trasforma nella matrice N'^tA^*N' dove

$$N' = \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che se la matrice N e' invertibile anche la matrice N' lo e'. Ne segue che il rango r di A coincide con il rango di N^tAN e che il rango R di A^* coincide con il rango di $N'A^*N'$. Inoltre i ranghi non cambiano se moltiplichiamo sia A che A^* per un numero reale non zero. Ne segue che i numeri r ed R sono invariati affini dell'iperquadrica. Ricordiamo inoltre che data una matrice simmetrica reale A se definiamo con $n_+(A)$ il numero di autovalori strettamente positivi della matrice e con $n_-(A)$ il numero di autovalori strettamente negativi vale la relazione $n_+(A)+n_-(A) =$ rango di A. Dal teorema di Sylvester segue che se N e' una matrice invertibile allora $n_+(A) = n_+(N^tAN)$ ed $n_-(A) = n_-(N^tAN)$. Si definisce segnatura di A la quantit' $s(A) = n_+(A) - n_-(A)$. Notiamo che se moltiplichiamo una matrice simmetrica reale A per un numero reale positivo la segnatura resta invariata, mentre se la moltiplichiamo per un numero reale negativo la segnatura cambia segno. Ne segue che nell'equazione di una iperquadrica il valore assoluto $|s|$ della segnatura della matrice A ed il valore assoluto $|S|$ della segnatura della matrice A^* sono invariati affini dell'iperquadrica. Vedremo che i quattro numeri $r, R, |s|, |S|$ sono gli unici invariati delle iperquadriche, in altre parole una iperquadrica si trasforma in un altra attraverso un cambiamento di coordinate del tipo $X = NY + v$ seguito da un riscaldamento se e soltanto se questi quattro invariati coincidono per le due iperquadriche,

1.1 La regola di Cartesio

Sia $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ un polinomio a coefficienti reali di grado $n > 0$ con $a_n \neq 0$, indichiamo con $z_0(P)$ la molteplicita' della radice 0 di P indichiamo con $z_+(P)$ il numero di radici reali strettamente positive contate con la loro molteplicita', con $z_-(P)$ il numero di radici reali strettamente negative contate con la loro molteplicita', e con $z_{\mathbf{C}}(P)$ il numero di radici non reali contate con la loro molteplicita'. Notiamo che essendo il polinomio a coefficienti reaali se γ e' una radice non reale anche $\bar{\gamma} \neq \gamma$ lo e', quindi $z_{\mathbf{C}}(P)$ e' un numero pari. Indichiamo con P^* il polinomio $P^*(x) = P(-x)$. Sia $M \subseteq \{0, 1 \ldots n\}$ l'insieme degli indici i tali che $a_i \neq 0$, scriviamo $M = \{i_1, i_2, \ldots i_p\}$ dove gli indici sono ordinati in maniera decrescente. Sia $N = \{h : 2 \leq h \leq p\}$ tali che $a_{i_h}a_{i_{h-1}} < 0$. Sia $V(P)$ il numero di elementi dell'insieme N. Vale allora il seguente:

Teorema 1.1 *(Teorema dei segni di Cartesio) Il numero $V(P) - z^+(P))$ e' non negativo pari, il numero $V(P^*) - z^-(P)$ e' non negativo pari, e $0 \leq (V(P) - z^+(P)) + (V(P^*) - z^-(P)) \leq z_{\mathbf{C}}(P) \leq n$. In particolare se il polinomio ha tutte radici reali allora $V(P) = z^+(P)$ e $V(P^*) = z^-(P))$. Osserviamo che se tutte le radici di P sono reali, il numero $z^-(P)$ di tutte le radici strettamente negative di P e' dato da $z^-(P) = n - z_0(P) - V(P)$.*

Se prendiamo come P il polinomio caratteristico di una matrice reale simmetrica A $n \times n$ di rango r allora il polinomio ha tutte radici reali e $z_0(P) = n - r$. D'altra parte $z^+(P) - z^-(P)$ e' la segnatura della matrice simmetrica A. Quindi usando il teorema di Cartesio il rango e la segnatura di A si possono ricavare dal suo polinomio caratteristico. Se applichiamo questo alla matrice A ed alla matrice A^* di una iperquadrica in $\mathbf{R}^n$ si vede che la forma canonica affine dell'iperquadrica si puo' ricavare dai polinomi caratteristici di A ed A^*.

1.2 Caso $n = 2$ ed $n = 3$

Vediamo piu' in particolare cosa succede nel caso $n = 2$ oppure $n = 3$.

Elenco delle coniche in forma canonica metrica

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > \quad b > 0)$ ellisse reale (non degenere) $r = 2, R = 3, |s| = 2, |S| = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0 \quad b > 0)$ iperbole (non degenere) $r = 2, R = 3, |s| = 0, |S| = 1$

$y = ax^2$ $(a > 0)$ parabola (non degenere) $r = 1, R = 3, |s| = 1, |S| = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ $(a > \quad b > 0)$
ellisse immaginaria, non ha punti in $\mathbf{R}^2$ (non degenere) $r = 2, R = 3, |s| = 2, |S| = 3$

$x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 0$ $a > 0$ coppia di rette reali incidenti
(degenere) $r = 2, R = 2, |s| = 0, |S| = 0$

$x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 0$ $(a > 0$ coppia di rette incidenti immaginarie (degenere)
$r = 2, R = 2, |s| = 2, |S| = 2$
ha in $\mathbf{R}^2$ il solo punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{x^2}{a^2} = 1$ $(a > 0)$ coppia di rette reali parallele e distinte (degenere) $r = 1, R = 2, |s| = 1, |S| = 0$

$\frac{x^2}{a^2} = -1$ $(a > 0)$ coppia di rette immaginarie parallele e distinte,
non ha punti in $\mathbf{R}^2$ (degenere) $r = 1, R = 2, |s| = 1, |S| = 2$

$x^2 = 0$ retta doppia $r = 1, R = 1, |s| = 1, |S| = 1$ (degenere)

C'e' un modo forse pi' diretto di quello descritto sopra per riconoscere la forma affine di una conica in termini dei segni di espressioni ricavate direttamente dall'equazione., pi' precisamente:

Proposizione 1.2 *Sia data una conica in* $\mathbf{R}^2$ *di equazione* $X^tAX + X^tb + c = 0$. *Consideriamo la quantita'* $D = |b|^2 - 4tr(A)c$. *Possiamo allora descrivere il tipo di conica nel modo seguente:*

> *Supponiamo* $det(A) > 0$ *si hanno allora le seguenti tre possibilita'*
> *se* $tr(A)det(A^*) > 0$ *la conica e' una ellisse immaginaria*
> *se* $tr(A)det(A^*) < 0$ *la conica e' una ellisse reale*
> *e se* $tr(A)det(A^*) = 0$ *la conica e' una coppia di rette immaginarie*
> *che si incontrano in un punto reale.*

Supponiamo $det(A) < 0$ si hanno allora le seguenti due possibilita'
se $det(A^*) \neq 0$ la conica e' una iperbole
se $det(A^*) = 0$ la conica e' una coppia di rette reali
che si incontrano in un punto

Supponiamo $det(A) = 0$ si hanno allora le seguenti quattro possibilita'
se $det(A^*) \neq 0$ la conica e' una parabola
se $det(A^*) = 0$ e $D > 0$ la conica e' una coppia di rette reali parallele e distinte
se $det(A^*) = 0$ e $D < 0$ la conica e' una coppia di rette immaginarie parallele e distinte
se $det(A^*) = 0$ e $D = 0$ la conica e' una retta doppia

Dimostrazione. Notiamo che le quantita' $det(A)$, $tr(A)det(A^*)$, e D non cambiano segno se si cambia segno a tutta l'equazione. Supponiamo allora $det(A) > 0$, cambiando segno a l'equazione se necessario possiamo supporre che entrambi gli autovalori di A siano positivi e quindi $tr(A) > 0$. Percio' in questo caso abbiamo $r = 2$ $s = |s| = 2$. Se $tr(A)det(A^*) > 0$ abbiamo $R = 3$ ed $S = 3$, se $tr(A)det(A^*) < 0$ avremo $R = 3,\ S = 1$ e se $tr(A)det(A^*) = 0$ avremo $R = 2$ ed $S = 2$, la proposizione segue quindi in questo caso. Supponiamo ora $det(A) < 0$ avremo allora $r = 2,\ s = 0$. Se $det(A^*) \neq 0$ si avra' $R = 3$ e $|S| = 1$, se invece $det(A^*) = 0$ si avra' $r = R = 2$ ed $s = S = 0$, quindi abbiamo anche in questo caso la proposizione. Se $det(A) = 0$ ma $det(A^*) \neq 0$ avremo $r = 1$, $s = 1$ ed $R = 3$ e sappiamo che in questo caso si ottiene una parabola. Resta il caso $det(A) = det(A^*) = 0$. Consideriamo il polinomio catatteristico della matrice A^* dato da $P_{A^*}(\lambda) = det(A^* - \lambda I) = -\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$. Si ha $a_1 = tr(A^*), a_3 = det(A^*)$ e si vede facilmente con conti espliciti che $a_2 = \frac{D}{4} - det(A)$. Se quindi $det(A) = det(A^*) = 0$ si ha $P_{A^*}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - tr(A^*)\lambda - \frac{D}{4})$. Percio' se $D = 0$ la molteplicita' algebrica dell'autovalore 0 nella matrice A^* e' uguale a 2, e cosi' e' per la sua molteplicita' geometrica, in altre parole $r = R = 1$ e quindi $|s| = |S| = 1$ e otteniamo la retta doppia. Se $D > 0$ gli autovalori non nulli di A^* hanno segno opposto e si trova $r = 1, R = 2, |s| = 1, |S| = 0$ e questo corrisponde a rette parallele reali. Se in fine $D < 0$ gli autovalori non nulli di A^* hanno lo stesso segno e si ha $r = 1, R = 2, |s| = 1, |S| = 2$ e si trovano rette parallele immaginarie. ■

Per quanto riguarda le quadriche in $\mathbf{R}^3$ I tipi possibili di quadriche degeneri sono: i coni ellittici (immaginari) $x^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0$ con $a > 0, b > 0$ e con $r = 3, R = 3, |s| = 3, |S| = 3$ i coni iperbolici $x^2 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$, con $a > 0, b > 0$ con $r = 3, R = 3, |s| = 1, |S| = 1$ e i cilindri su coniche che hanno gli stessi ranghi e le stesse segnature delle corrispondenti coniche. Notiamo che un cono contiene sempre l'origine, e che se contiene un vettore non nullo v, contiene anche tutta la retta passante per l'origine con vettore direttore v. I cilindri corrispondono alle equazioni nelle quali qualche variabile non compare, cio' vuol dire che le variabili che non compaiono possono assumere qualunque valore. Si ottiene quindi un cilindro sopra l'oggetto geometrico descritto dall'equazione (pensato in uno spazio di dimensione inferiore). Ad esempio si puo' avere un cilindro sopra una circonferenza, oppure sopra una ellisse, oppure una coppia di piani che si puo' anche pensare come un cilindro sopra una coppia di rette.

I tipi possibili di quadriche non degeneri sono:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0\ \ b>0\ \ c>0)$ ellissoide reale $r=3, R=4, |s|=3, |S|=2$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ $(a>\ \ b>0\ \ c>0)$ ellissoide immaginario $r=3, R=4, |s|=3, |S|=4$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0\ \ b>0\ c>0)$ iperboloide iperbolico, (cestino della carta) $r=3, R=4, |s|=1, |S|=0$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0\ \ b>0\ \ c>0)$ iperboloide ellittico detto anche iperboloide a due falde $r=3, R=4, |s|=1, |S|=2$

$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0\ b>0)$ paraboloide iperbolico (sella) $r=2, R=4, |s|=0, |S|=0$

$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0\ \ b>0)$ paraboloide ellittico $r=2, R=4, |s|=2, |S|=2$

Teorema 1.3 *Sia S un paraboloide iperbolico di equazione $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, allora per ogni punto $p\in S$ esiste un coppia di rette distinte contenute in S che si intersecano in p.*

Dimostrazione. Scriviamo l'equazione del paraboloide iperbolico nella forma $z=(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$. Sia p il punto di S di coordinate $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Se $x_0=y_0=z_0=0$ le due rette contenute in S passanti per p hanno equazioni

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \end{cases}$$

Se $z_0=0$ ma x_0 ed y_0 non sono entrambi nulli, allora uno tra i due numeri $\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}$ e $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}$ e' non nullo mentre l'altro e' nullo. Supponiamo che $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=t_0$ sia diverso da zero, mentre $\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}=0$. In questo caso le due rette distinte contenute in S passanti per p hanno equazioni

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t_0 \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{t_0} \end{cases}$$

Similmente se $\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = t_0 \neq 0$ mentre $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 0$ le due rette distinte contenute in S passanti per p hanno equazioni

$$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t_0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{t_0} \end{cases}$$

In fine se $z_0 \neq 0$ allora $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = t_0 \neq 0$ e $\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = \tau_0 \neq 0$. In questo caso le due rette distinte contenute in S passanti per p hanno equazioni

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = t_0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{t_0} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{\tau_0} \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \tau_0 \end{cases}$$

■

Un analogo teorema vale per l'iperboloide iperbolico, piu' precisamente

Teorema 1.4 *Sia S un iperboloide iperbolico di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$, allora per ogni punto $p \in S$ esiste un coppia di rette distinte contenute in S che si intersecano in p.*

Dimostrazione. Sia p il punto di S di coordinate $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Se $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, dall'equazione segue che $\frac{z_0^2}{c^2} = 1$. In particolare x_0, y_0 e z_0 sono tutti non nulli e l'equazione dell'iperboloide iperbolico puo' essere scritta nella forma $\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} - \frac{z^2}{z_0^2} = 1$. In questo caso le due rette distinte contenute in S passanti per p hanno equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_0} = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x}{x_0} - \frac{z}{z_0} = 0 \end{cases}$$

Se $\frac{x_0^2}{a^2} \neq 1$ allora $1 - \frac{x_0}{a} \neq 0$ e $1 + \frac{x_0}{a} \neq 0$. Inoltre osserviamo che $(\frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c})(\frac{y_0}{b} - \frac{z_0}{c}) = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2} \neq 0$. Poniamo allora

$$t_0 = \frac{\frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c}}{1 + \frac{x_0}{a}} \neq 0$$

e

$$\tau_0 = \frac{\frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c}}{1 - \frac{x_0}{a}} \neq 0$$

e In questo caso le due rette distinte contenute in S passanti per p hanno equazioni

$$\begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = t_0(1 + \frac{x}{a}) \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{1}{t_0}(1 - \frac{x}{a}) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \tau_0(1 - \frac{x}{a}) \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\tau_0}(1 + \frac{x}{a}) \end{cases}.$$

Se $\frac{{x_0}^2}{a^2} = 1$ ma $\frac{{y_0}^2}{b^2} \neq 1$ allora $1 - \frac{y_0}{b} \neq 0$ e $1 + \frac{y_0}{b} \neq 0$. Inoltre osserviamo che $(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c})(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}) = \frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{z_0}^2}{c^2} = 1 - \frac{{y_0}^2}{b^2} \neq 0$. Poniamo allora

$$t_1 = \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}}{1 + \frac{y_0}{b}} \neq 0$$

e

$$\tau_1 = \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}}{1 - \frac{y_0}{b}} \neq 0$$

In questo caso le due rette distinte contenute in S passanti per p hanno equazioni

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = t_1(1 + \frac{y}{b}) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{t_1}(1 - \frac{y}{b}) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \tau_1(1 - \frac{y}{b}) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\tau_1}(1 + \frac{y}{b}) \end{cases}$$

■

1.3 Coniche come sezioni di coni

Il motivo per cui le coniche si chiamano coniche, e' che quasi ogni conica e' affinemente equivalente all'intersezione del cono $x^2+y^2-z^2=0$ con un piano. Le uniche eccezioni sono rette parallele reali e distinte $x^2-a^2=0$, con $a>0$, rette parallele immaginarie $x^2+a^2=0$, con $a>0$ ed ellissi immaginario $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$. con $a>0, b>0$. Per ottenere le coniche rimanenti potremmo intersecare piani con altre quadriche. Ad esempio per ottenere rette parallele si potrebbero considerare le intersezioni del cilindro con base una circonferenza $x^2+y^2-1=0$ con i piani di equazione $y=c$. Cosi' si ottengono sia rette parallele reali per $c<1$ sia rette parallele immaginarie per $c>1$. immaginarie . In fine per ottenere ellissi immaginarie si potrebbe considerare l'intersezione di piani $z=a$ tali che $a^2>1$ con la sfera $x^2+y^2+z^2=1$.

2 Descrizione geometrica delle coniche non degeneri a punti reali

Siano F_1 ed F_2 due punti di $\mathbf{R}^2$, l'ellisse e' descritta come il luogo dei punti p in $\mathbf{R}^2$ tali che la somme delle distanze di P dai punti F_1 ed F_2 e' una costante positiva $2a$ diversa dalla distanza $2c$ tra F_1 ed F_2. I punti F_1 ed F_2 sono detti fuochi dell'ellisse. Notiamo che se i fuochi coincidono con un unico punto F si ottiene una circonferenza di centro F e raggio a. Similmente :

Dati due punti distinti F_1 ed F_2 in $\mathbf{R}^2$, l'iperbole e' descritta come il luogo dei punti P in $\mathbf{R}^2$ tali che il valore assoluto della differenza delle distanze di P dai punti F_1 ed F_2 e' una costante positiva $2a$ diversa dalla distanza $2c$ tra F_1 ed F_2. I punti F_1 ed F_2 sono detti fuochi dell'iperbole.

Ricordiamo ora che per ogni terna di punti P Q ed R in $\mathbf{R}^2$ vale la disuguaglianza triangolare $d(P,Q)+d(Q,R) \geq d(P,R)$. Da cio' segue che se P e' un punto dell' ellisse di fuochi F_1 ed F_2 vale la disuguaglianza

$$2a = d(F_1,P) + d(P,F_2) \geq d(F_1,F_2) = 2c$$

ma per ipotesi a non coincide con c percio' nel caso dell'ellisse abbiamo che $a > c$.

Se P e' invece un punto dell'iperbole con fuochi F_1 ed F_2 si ha

$$d(F_1,P) \leq d(F_1,F_2) + d(F_2,P)$$

e

$$d(F_2,P) \leq d(F_2,F_1) + d(F_1,P)$$

percio'

$$2a = |d(P,F_1) - d(P,F_2| \leq 2c$$

e poiche' a e c non coincidono nel caso del'iperbole abbiamo $a < c$.

Verifichiamo che si ottengono effettivamente l'ellisse e l'iperbole.

Nel caso dell'ellisse se scegliamo il sistema di coordinate ortogonali in modo che i fuochi stiano sull'asse x da parti opposte rispetto all'origine ed abbiano uguale distanza dall'origine, allora essi hanno coordinate $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ rispettivamente.

La somma delle distanze del punto di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dai fuochi e'

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

e' la condizione descritta sopra diventa

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

facendo il quadrato e semplificando si trova

$$-\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)} = x^2+y^2+c^2-2a^2$$

il che implica che $x^2+y^2+c^2-2a^2 \leq 0$
e facendo ancora il quadrato si trova

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=0$$

Cioe'

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{2}$$

o anche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

con $a^2-c^2>0$ e $b=\sqrt{a^2-c^2} \leq a$.

Notiamo che se l'equazione (**??**) e' soddisfatta l'espressione $x^2+y^2+c^2-2a^2 = x^2+y^2-a^2-b^2 = a^2(1-\frac{y^2}{b^2})+y^2-a^2-b^2 = \frac{a^2b^2-a^2y^2+b^2y^2-a^2b^2-b^4}{b^2} = \frac{-(a^2-b^2)y^2-b^4}{b^2}$, e' minore o uguale a 0 poiche' $0 \leq b \leq a$. Se in una ellisse $b \geq a$ ci si puo' sempre ricondurre al caso precedente applicando la trasformazione ortogonale $(x,y) \to (y,x)$.

Nel caso dell'iperbole in modo simile si trova

$$\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)} = x^2+y^2+c^2-2a^2$$

dal che si deduce che $x^2+y^2+c^2-2a^2 \geq 0$,
e facendo ancora il quadrato

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=0$$

Cioe'

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{4}$$

ovvero

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

con $a^2-c^2<0$ e $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Notiamo che se l'equazione (**??**) e' soddisfatta l'espressione $x^2+y^2+c^2-2a^2 = x^2+y^2+b^2-a^2 = a^2(1+\frac{y^2}{b^2})+y^2-a^2+b^2 = \frac{a^2b^2+a^2y^2+b^2y^2-a^2b^2+b^4}{b^2} = \frac{(a^2+b^2)y^2+b^4}{b^2}$, e' maggiore o uguale a 0.

Dato un punto F in $\mathbf{R}^2$ ed una retta δ tale che F non appartiene a δ, la parabola e' descritta come il luogo dei punti P di $\mathbf{R}^2$ tali che $d(P,F)=d(P,\delta)$.

Infatti se $d(F,\delta)=\frac{1}{2a}$ scegliamo il sistema di coordinate ortogonali in modo che la retta δ sia parallela all'asse x, in modo che F sia sul semiasse y positivo, che δ sia dalla parte opposta di F rispetto all asse x, ed in fine che la distanza di F dall'origine coincida con la distanza di δ dall'origine. Allora F ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$ mentre δ ha equazione $x=\frac{-1}{4a}$. Se P ha coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ allora l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2+(y-\frac{1}{4a})^2} = |y+\frac{1}{4a}|.$$

Quadrando e semplificando si ottiene

$$y = ax^2$$

Scegliamo ora un punto F di $\mathbf{R}^2$ ed una retta δ non contenente F ed un numero reale $e > 0$.

Consideriamo il luogo C dei punti P in $\mathbf{R}^2$ tali che

$$d(P, F) = e\ d(P, \delta)$$

Allora C e' una parabola se $e = 1$, e' una iperbole se $e > 1$ ed e' una ellisse con fuochi distinti (cioe' e' una ellisse che non e' una circonferenza) se $e < 1$. D'altra parte ogni iperbole, ogni parabola ed ogni ellisse diversa da una circonferenza si puo' ottenere in questo modo per una opportuna scelta di F di δ e di e.

Il caso $e = 1$ e' trattato sopra.

Nel caso $e \neq 1$ sia d la distanza di F da δ sia $c = \frac{de^2}{|e^2-1|}$ e sia $a = \frac{de}{|e^2-1|}$. Abbiamo allora $a > 0,\ c > 0$ ed $e = \frac{c}{a}$. Scegliamo il sistema di coordinate in modo che l'asse x coincida con la retta passante per F e perpendicolare a δ. Orientiamo l' asse x nel verso che va da F verso δ se $e < 1$ e nel verso che va da δ verso F altrimenti. In fine scegliamo l'origine a distanza c da F in modo che il segmento dall'origine verso F sia orientato come l'asse x. Risulta allora che F ha coordinate $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ e δ ha equazione $x = \frac{a^2}{c}$.

L'equazione allora diventa

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\ |x - \frac{a^2}{c}|$$

facendone il quadrata e semplificando si trova

$$(1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 + c^2 = a^2$$

cioe'

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) + y^2 + c^2 - a^2 = 0$$

o anche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

che coincide con l' equazione (**??**) se $a > c$ cioe' se $e < 1$ e con l'equazione (**??**) se $a < c$ cioe' se $e < 1$. Essendo $c > 0$ la curva non puo' mai essere una circonferenza. Se abbiamo una ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2}$ con $c > 0$, e se facciamo tendere a verso un $r > 0$ e c verso 0 l'ellisse tende a diventare una circonferenza di raggio r. D'altra parte l'eccentricita' dell'ellisse tende a zero mentre la sue direttrice tende all'infinito, si potrebbe quindi dire che la circonferenza e' una conica con eccentricita' zero e direttrice all'infinito.

3 coniche non degeneri a punti reali in coordinate polari

Fissato un sistema di coordinate polari nel piano con $\rho > 0, -\pi < \theta \leq \pi$. La circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$ ha equazione

$$\rho = r$$

Dato un numero $e > 0$ sia δ la retta di equazione cartesiana $x = h$ con $h > 0$. e sia F l'origine. Notiamo che F non appartiene a δ. Consideriamo la curva data dall'equazione $d(P, F) = ed(P, \delta)$. Essendo $e > 0$ un punto di questa curva non puo' coincidere con F e non puo' appartenere a δ. In coordinate polari questa equazione diventa

$$\rho = e\ |h - \rho\cos(\theta)|$$

Nei punti della curva $|h - \rho\cos(\theta)|$ non e mai zero, quindi se θ varia in un intervallo questa quantita' deve avere segno costante. Consideriamo separatamente due casi

caso 1) $h - \rho\cos(\theta) > 0$ e caso 2) $h - \rho\cos(\theta) < 0$.

Notiamo che se $e \leq 1$ per i punti della curva il caso 2) non si puo' presentare.

Infatti nel caso 2) l'equazione della curva diventa $\rho = e\ (\rho\cos(\theta) - h)$ cioe'

$$\rho(1 - e\cos(\theta)) = -eh$$

D'altra parte se $e \leq 1$ deve essere $e\cos(\theta) \leq 1$ e quindi $1 - e\cos(\theta) \geq 0$ inoltre $\rho > 0$ mentre $-eh < 0$ percio' l' equazione sopra e' impossibile.

Se ne deduce che se $e \leq 1$ l'equazione della curva e'

$\rho = e\ (h - \rho\cos(\theta)$ cioe'

$$\rho = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta)} \tag{6}$$

Se $e < 1$ poiche' la quantita' $1 + e\cos(\theta)$ e' sempre positiva l'equazione (**??**) e' definita per $-\pi < \theta \leq \pi$. Questa e' l'equazione in coordinate polari di una ellisse che non sia una circonferenza.

Se $e = 1$ la quantita' $1+\cos(\theta)$ e' maggiore o uguale a zero e si annulla per $\theta = \pi$. l'equazione (**??**) e' definita per $-\pi < \theta < \pi$. Questa e' l 'equazione in coordinate polari di una parabola.

Se $e > 1$ si possono presentare entrambi i casi $h-\rho\cos(\theta) > 0$ ed $h-\rho\cos(\theta) < 0$.

Per $h-\rho\cos(\theta) > 0$ l'equazione e' sempre $\rho = \frac{eh}{1+e\cos(\theta)}$ ma la quantita' $1+e\cos(\theta)$ si annula se $\cos(\theta) = \frac{-1}{e}$. Sia θ_0 l'angolo tra $\frac{\pi}{2}$ e π tale che $\cos(\theta_0) = \frac{-1}{e}$ e $\sin(\theta_0) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$. Dato che $\rho > 0$, l' equazione

$$\rho = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta)}$$

e' definita per $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ e descrive uno dei due rami dell'iperbole.

Per $h - \rho\cos(\theta) < 0$ l'equazione diventa $\rho = e(\rho\cos(\theta) - h)$ cioe'

$$\rho = \frac{eh}{e\cos(\theta) - 1}.$$

La quantita' $e\cos(\theta) - 1$ si annula se $\cos(\theta) = \frac{1}{e}$. Sia allora θ_1 l'angolo tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ tale che $\cos(\theta_1) = \frac{1}{e}$ e $\sin(\theta_1) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$. Dato che $\rho > 0$, l' equazione

$$\rho = \frac{eh}{e\cos(\theta) - 1}$$

e' definita per $-\theta_1 < \theta < \theta_1$ e descrive l' altro ramo dell'iperbole. Sia $P \in \mathbf{R}^2$ il punto di coordinate polari $\rho = \frac{he^2}{e^2-1}$ e $\theta = 0$. Notiamo che le semirette $\theta = \theta_0$ e $\theta = -\theta_1$ formano una retta r_1 passante per il fuoco, analogamente le semirette $\theta = \theta_1$ e $\theta = -\theta_0$ formano una retta r_2 passante per il fuoco. Le rette parallele ad r_1 ed r_2 passanti per il punto P sono allora gli asintoti dell'iperbole.