Compito di Geometria Ingegneria Medica 21-1-2020 Trapani

C SOLUZIONI

Esercizio 1

Sia $\beta = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}$. Provare che β e' una base di $\mathbf{R}^3$. Sia $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $L(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale del nucleo e una base ortonormale dell'immagine di L. Determinare la matrice associata ad L rispetto alla basi β in partenza e β in arrivo.

SOLUZIONE La matrice A che ha per colonne i vettori di β ha determinante non zero, quindi β e' una base. La matrice B associata ad L rispetto alle basi β in partenza e β in arrivo ha per colonne i vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ -3/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le soluzioni del sistema lineare $BX = 0$ sono le coordinate RISPETTO ALLA BASE β dei vettori del nucleo di L. Quindi se i vettori della base β sono v_1, v_2, v_3 e se il vettore $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, e' soluzione del sistema $BX = 0$, NON E' VERO che il vettore X appartiene al nucleo di L, e' vero invece che il vettore $u = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ apparitene al nucleo di L. Ora i vettori $L(v_1), L(v_2), L(v_3)$ generano l'immagine di L (come sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$) quindi una base dell immagine di L sono ad esempio il vettori $L(v_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, L(v_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Una base ortonormale di $Imm(L)$ si ottiene con il procedimento di Gram-Schmidt. Ora $dimImm(L) = 2$, $dim\mathbf{R}^3 = 3$, e $dimImm(L)+dimKer(L) = dim\mathbf{R}^3$, quindi $dimKerL = 1$. Se $\{X_1, Y_1\}$ con $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e' una base dello spazio delle soluzioni del sistema $BX = 0$, allora

$\{u_1\}$ con $u_1 = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3,\quad$ e' una base del nucleo L. Considerando quindi il vettore $\frac{u_1}{|u_1|}$ si conclude l'esercizio. Un'altro modo per trovare una base del nucleo e' osservare che $L(v_2) = L(v_3)$ quindi il vettore $v_2 - v_3$ e' un vettore non nullo del nucleo di L, ne e' quindi una sua base.

Esercizio 2

Determinare equazioni cartesiane e parametriche del sottospazio affine Σ di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 2 ortogonale, al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, passante per il punto P di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e contenuto nel sottospazio affine di equazione $3x - y - 3z + 2w - 2 = 0$.

SOLUZIONE

Dato che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, e' ortogonale al sottospazio affine Σ i vettori di Σ soddisfano l'equazione $x + 3y + 3z + 3w + d = 0$, per un d opportuno, dato che il punto P appartiene a Σ dovra' essere $d = -7$. Inoltre il testo dell'esercizio dice che i vettori di Σ soddisfano anche l'equazione $3x - y - 3z + 2w - 2 = 0$. Ora il rango della matrice che ha per righe i vettori $(1, 3, 3, 3)$ e $(1, -1, -3, 2)$ e' due, l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} 3x - y - 3z + 2w - 2 = 0 \\ x + 3y + 3z + 3w - 7 = 0 \end{cases}$ ha quindi dimensione $4 - 2 = 2$ e coincide percio' con Σ. Questo sistema da' equazioni cartesiane di Σ, equazioni parametriche si trovano risolvendo il sistema lineare dato dalle equazioni cartesiane.

Esercizio 3

Sia A una matrice ortogonale 2×2 tale che $det(A) = -1$ (riflessione) e tale che $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

SOLUZIONE

Se il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e il vettore $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sono i vettori colonna della matrice A dato che A e' una matrice ortogonale, il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e il vettore $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ hanno entrambi norma 1 e sono tra loro ortogonali, quindi $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Dato che il determinante di A e' -1 siamo nel secondo caso. La condizione $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mi da' un sistema lineare di incognite a, b la cui unica soluzione fornisce la matrice A. E' possibile a questo punto calcolare $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Altra possibile soluzione. Dato che A e' una riflessione che fissa il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e dato che il vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ deve essere $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ora scrivendo il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e moltiplicando a sinistra per la matrice A si vede quanto viene $A \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.