Facoltà di Ingegneria

Geometria ingegneria medica . Esame (02/07/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato** Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione A

1) DOMANDA FILTRO punti 6

Il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ e' una operazione che dati due vettori in $\mathbb{R}^n$ ad essi assegna un : 1) vettore in $\mathbb{R}^n$ 2) scalare in $\mathbb{R}$ 3) matrice $n \times n$ a coefficienti reali. Quali delle risposte 1),2),3) e' quella giusta ? Per quale valore di n abbiamo definito il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^n$? Quale delle risposte 1) 2) 3) e' giusta nel caso del prodotto vettoriale ? (La domanda filtro si compone di tutte le domande sopra).

Soluzione

La risposta corretta per il prodotto scalare e' la 2)e per il prodotto vettoriale e' la 1). Il prodotto vettoriale e' definito solo per vettori in $\mathbb{R}^3$.

2) Esercizio 2. Punti 10

Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - z \end{pmatrix}$$

Sia **b** la terna di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sia **d** il vettore (3) in $\mathbb{R}$. Provare che **b** e' una base di $\mathbb{R}^3$ e che **d** e' una base di $\mathbb{R}$. Determinare la matrice associata all'applicazione lineare L rispetto alle basi **b** di $\mathbb{R}^3$ e **d** di $\mathbb{R}$. Determinare una base del nucleo di L ed una base dell immagine di L.

Soluzione

Il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e' non nullo, ne segue che **b** e' una base di $\mathbb{R}^3$. il vettore (3) e' un vettore non nullo di $\mathbb{R}$ ed e' quindi una base. Costruiamo ora la matrice associata ad L nelle basi date. $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1 = \frac{1}{3}(3)$, $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3 = 1(3)$ e $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0 = 0(3)$ quindi la matrice associata ad L nelle basi date e'

$\left(\frac{1}{3}, 1, 0\right)$. Il nucleo di L ha equazione cartesiana $2x + y - z = 0$, cioe' $z = 2x + y$. Il nucleo ha quindi dimensione 2 ed una sua base e' $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. L'applicazione non e' zero, la sua immagine ha quindi almeno dimensione 1 ed essendo contenuta in $\mathbb{R}$ coincide con $\mathbb{R}$. Una sua base e' quindi ad esempio il vettore (1).

3 Esercizio 3 punti 8

Si consideri la famiglia di coniche $2xy - a = 0$ al variare del parametro reale a. Determinare un sistema di coordinate che metta questa famiglia di coniche in forma canonica metrica e si dica al variare del parametro a di che conica si tratta. Si dica in particolare per quali valori di a (se esistono) tale conica risulta degenere.

Soluzione

La matrice della parte quadratica della conica e'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Il polinomio caratteristico di A e' $\lambda^2 - 1$ le cui radici sono $+1$ e -1. L'equazione cartesiana dell'autospazi V_1 e' $x - y = 0$, l'equazione cartesiana dell'autospazio V_{-1} e' $x + y = 0$. Una base ortonormale di autovettori di A e' $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e la corrispondente matrice ortogonale che diagonalizza A e'

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

. Il sistema di cooordinate (x', y') tale che $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ cioe' tale che $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$ $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$ diagonalizza la parte quadratica della conica. Nelle nuove coordinate quindi la conica diventa $x'^2 - y'^2 = a$, che e' una iperbole se $a \neq 0$ ed e' una coppia di rette reali e distinte intersecantesi in un punto (conica degenere) se $a = 0$.

4) Domanda delicata punti 6

Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali, si supponga che $A^2 = I$. Si determinino gli autovalori di A e si provi che A e' diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Suggerimento Di dimostri da prima che A ha esattamente due autovalori distinti, e si determinino tali autovalori. Poi dato X in $\mathbb{R}^n$ si suppongo che X si scriva come $X = X_1 + X_2$ con X_1 ed X_2 autovettori dei due distinti autovalori, si applichi all uguaglianza sopra la matrice A si ottengono cosi' le espressioni di v_1 e v_2, va poi verificato che tali vettori v_1 e v_2 sono effettivamente autovettori di A corrispondenti ai due distinti autovalori.

Soluzione

Se v e' un autovettore di A di autovalore λ si ha $Av = \lambda v$, quindi $A^2 v = \lambda^2 v$, percio' $\lambda^2 = 1$, cioe' $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$. Se X e' un vettore di $\mathbb{R}^n$ supponiamo di poter scrivere X nella forma $X = X_1 + X_2$ dove X_1 e' un autovettore di autovalore 1 (oppure e' 0) e X_2 e' autovettore di autovalore -1 (oppure e' 0). Allora $AX = AX_1 + AX_2 = X_1 - X_2$, se ne deduce che $X_1 = \frac{X+AX}{2}$ e $X_2 = \frac{X-AX}{2}$. Viceversa dato X qualunque in $\mathbb{R}^n$, se poniamo $X_1 = \frac{X+AX}{2}$ e $X_2 = \frac{X-AX}{2}$ si ha $AX_1 = \frac{AX+A^2X}{2} = \frac{AX+X}{2} = X_1$ e $AX_2 = \frac{AX-A^2X}{2} = \frac{AX-X}{2} = -X_2$. Abbiamo quindi provato che $\mathbb{R}^n = V_1 + V_{-1}$ e cioe' che A e' diagonalizzabile (sui reali).