Facoltà di Ingegneria

Geometria ingegneria medica . Esame (02/07/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato** Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4 TOTALE	

Versione B

1) DOMANDA FILTRO punti 6

Completare la frase seguente:

Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, lo spazio ortogonale $W^\perp$ del sottospazio W rispetto al prodotto scalare canonico $< >$ e' definivo come l'insieme dei vettori X in $\mathbb{R}^n$ tali che ... Soluzione

$$W^\perp = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } < X, Y >= 0 \text{ per ogni } Y \in W$$

2) Esercizio 2. Punti 10

Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 5z \end{pmatrix}$$

Sia **b** la terna di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

. Sia **d** il vettore (7) in $\mathbb{R}$. Provare che **b** e' una base di $\mathbb{R}^3$ e che **d** e' una base di $\mathbb{R}$. Determinare la matrice associata all'applicazione lineare L rispetto alle basi **b** di $\mathbb{R}^3$ e **d** di $\mathbb{R}$. Determinare una base del nucleo di L ed una base dell immagine di L. Soluzione Il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e' non nullo, ne segue che **b** e' una base di $\mathbb{R}^3$. il vettore (7) e' un vettore non nullo di $\mathbb{R}$ ed e' quindi una base. Costruiamo ora la matrice associata ad L nelle basi date. $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 = \frac{2}{7}(7)$, $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -3 = \frac{-3}{7}(7)$ e $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = -12 = \frac{-12}{7}(7)$ quindi la matrice associata ad L nelle basi date e' $\left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{12}{7}\right)$. Il nucleo di L ha equazione cartesiana $x + y - 5z = 0$, cioe' $z = 1/5x + 1/5y$. Il nucleo ha quindi dimensione 2 ed una sua base e' $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/5 \end{pmatrix}\}$. L'applicazione non e' zero, la sua immagine ha quindi almeno dimensione 1 ed essendo contenuta in $\mathbb{R}$ coincide con $\mathbb{R}$. Una sua base e' quindi ad esempio il vettore (1).

3 Esercizio 3 punti 8

Si consideri la famiglia di coniche $x^2 + ay^2 - ax - y = 0$ al variare del parametro reale a. Si determini un sistema di coordinate che metta questa famiglia di coniche in forma canonica metrica e si dica al variare del parametro a di che conica si tratta. Si dica poi per quali valori di a (se esistono) la corrispondente conica risulta degenere. Soluzione La matrice associata alla parte quadratica della

conica e' gia' diagonale, bisogna se possibile far sparire i termini di primo grado mediante una traslazione. Dalla teoria sappiamo che si possono far sparire tutti i termini di primo grado se il determinante della matrice della parte quadratica della conica e' non zero, cioe' nel nostro caso se $a \neq 0$. In tal caso poniamo $x = x' + \alpha,\ y = y' + \beta$ e troviamo la conica nelle nuove coordinate

$$x'^2 + ay'^2 + (2\alpha - a)x' + ((2a\beta - 1)y' + (\alpha^2 + a\beta^2 - a\alpha - \beta) = 0$$

. Se quindi poniamo $\alpha = \frac{a}{2},\ \beta = \frac{1}{2a}$ troviamo la conica $x'^2 + ay'^2 + c = 0$ con $c = -\frac{(a^3+1)}{4a}$. Se $a > 0$ si trova una ellisse, se $a < 0$ con $a \neq -1$ si trova una iperbole, se $a = -1$ si trova una coppia di rette reali e distinte incidenti in un punto (unico caso di conica degenere). Se $a = 0$ si trova una parabola gia' in forma canonica.

4) Domanda delicata punti 6

Sia A una matrice 2×2 a coefficienti complessi, provare che esiste N invertibile 2×2 tale che $N^{-1}AN = T$ con T triangolare superiore. Si provi che sulla diagonale di T ci sono gli autovalori di A. Suggerimento Di dimostri da prima che A ha almeno un autovettore. Soluzione Dato che il

polinomio caratteristico ha sempre soluzioni sui complessi, esiste sicuramente un autovettore v (non nullo) di A. Sia λ il corrispondente autovalore. Sia w un vettore non nullo e non proporzionale a v. (Tale vettore esiste sicuramente, basta prendere per esempio un vettore ortogonale a v). La matrice associata all'applicazione lineare $X \to AX$ rispetto alla base $\{v, w\}$ di $\mathbf{C}^2$ ha come prima colonna il vettore $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ ed e' quindi una matrice T triangolare superiore. La traccia e' la somma degli autovalori di T (che sono anche gli autovalori di A) ma e' anche la somma degli elementi sulla diagonale di T, quindi T ha sulla diagonale gl autovalori di A.