1. COMPITO GEOMETRIA PER INGEGNERIA MEDICA TRAPANI 21-06-2021 A

Esercizio 1

Sia A la matrice $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare A^7 cioe' il prodotto di A per se' stessa 7 volte. Non e' accettato il calcolo diretto, usare la teoria della diagonalizzazione.

Esercizio 2

Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^4$, $v_1 = (0, 1, -2, 1), v_2 = (1, 0, 2, -1), v_3 = (3, 2, 2, -1), v_4 = (0, 0, 1, 0), u_1 = (1, 1, 0, 0), u_2 = (-1, 1, -4, 2)$. Determinare una base di $V := Span(v_1, v_2, v_3)$, provare che i vettori u_1 ed u_2 appartengono a V. Sia $W = span(v_3, v_4)$ calcolare la dimensione di $V + W$, determinare una base di $V \cap W$.

Esercizio 3

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la famiglia π_α, di piani di equazione $\alpha x + 2y - 2\alpha z + 2y + 4 = 0$ al variare del parametro α. Dire se esiste una retta s contenuta in tutti i piani della famiglia, e in tal caso determinarne una equazione cartesiana o parametrica. Sia s la retta di equazione

$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 2x + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Determinare tutti i valori di α (se esistono) per i quali la retta s e' perpendicolare a π_α, e tutti i valori per i quali essa e' parallela a π_α.

Esercizio 4

Si considerino lo spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di una variabile di grado minore o uguale a 3 e lo spazio vettoriale W dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Si consideri inoltre l'applicazione lineare $L : V \to W$ data da $L(P)(x) = x(P(x) - P(1)) + P(0)$. (Per $P(1), P(0), P(x)$ si intende il polinomio calcolato in $0, 1, x$ ecc...). Calcolare una base di $KerL$, e una base di $Imm(L)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Il polinomio caratteristico di A e' $\lambda^2 - (3/2)\lambda + 1/2$ le cui radici sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1/2$. Quindi la matrice ha autovalori reali e distinti ed e' percio' diagonalizzabile sui reali. Una base di autovettori di A e' data da $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ di autovalore 1 e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ di autovalore $1/2$. La matrice N che ha per colonne v_1 e v_2 e' tale che $N^{-1}AN = D$ con $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Quindi $A = NDN^{-1}$, $A^2 = NDN^{-1}NDN^{-1} = NDIDN^{-1} = ND^2N^{-1}$, $A^3 = ND^3N^{-1}$ ecc... quindi $A^7 = ND^7N^{-1}$. Ora $D^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/128 \end{pmatrix}$. In fine $N^{-1} = Agg(N)/det(N) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} /1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Si completa il calcolo facendo il relativo prodotto di matrici.

Esercizio 2

Sia A la matrice che ha per colonne i vettori v_1, v_2, v_3, si vede con l'eliminazione di Gauss che A ha rango 2, i vettori v_1, v_2 sono non nulli e non sono multipli uno dell'altro, percio' sono una base di V. I vettori v_3, v_4 sono anche essi non nulli e non sono multipli l'uno dell'altro, percio' essi sono una base di W. Si vede con l'eliminazione di Gauss che la matrice B che ha per colonne i vettori v_1, v_2, v_3, v_4

ha rango 3, d'altra parte v_1, v_2, v_3, v_4 e' un insieme di generatori di $V+W$, quindi la dimensione di $V+W$ e' 3. La formula di Grassmann dice $dim(V+W) = dim(V) + dim(W) - dim(V \cap W)$. Percio' $dim(V \cap W) = 1$. Il vettore v_3 appartiene a V, ma esso appartiene anche a W, appartiene quindi a $V \cap W$. Inoltre v_3 e' non nullo. Percio' v_3 e' una base di $V \cap W$.

Esercizio 3

Primo punto, primo modo (piu' veloce)

Il piano π_α ha equazione $\alpha(x-z)+2(y+2) = 0$. Quindi la retta $x-z = 0, y+2 = 0$ e' contenuta in tuttti i piani π_α. Primo punto secondo modo

Si intersecano i piani $y+2=0$ cioe' il piano π_0 con il piano $x - z + 2y + 4 = 0$ cioe' con il piano π_1. Questa intersezione e' una retta s. Questa retta intersezione di π_0 e π_1 passa ad esempio per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vettore direttore di s e' ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il piano P_α parallelo a π_α che passa per l'origine ha equazione $\alpha x + 2y - \alpha z = 0$. Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a P_α per ogni α numero reale, e il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a π_α per ogni α reale, quindi la retta s e' contenuta in tutti i piani π_α.

Secondo punto

Un vettore direttore della retta s' e' ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Un vettore perpendicolare al piano π_α e' $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ -2\alpha \end{pmatrix}$. Quindi la retta s' e' perpendicolare al piano π_α se esiste un λ non nullo tale che $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ -2\alpha \end{pmatrix}$. Dovra' essere quindi $\lambda = \alpha$ e $3\alpha = 2$, cioe' $\alpha = 2/3$.

Terzo punto

La retta s' e' parallela a π_α se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e' perpendicolare ad $\begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ -2\alpha \end{pmatrix}$ cioe' se $\alpha - 6 + 4\alpha = 0$, ovvero se $\alpha = 6/5$.

Esercizio 4 Se $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, allora $L(P)(x) = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - a_0 - a_1 - a_2) + a_0 = a_0 + (-a_1 - a_2)x + a_1 x_2 + a_2 x^3$.

Quindi $L(P) = 0$ (dove 0 indica il polinomio identicamente nullo) se e solo se $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Percio' il nucleo di P e' zero. Primo modo per trovare una base dell'immagine di L (modo piu' veloce) L'immagine di P e' l'insieme dei polinomi $Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ di grado minore o uguale a 3, tali che esistono numeri reali a_0, a_1, a_2 per i quali $b_0 = a_0, b_1 = -a_1 - a_2$ e $b_2 = a_1$ e $b_3 = a_2$. Quindi Q appartiene all immagine di L se e solo se $b_1 + b_2 + b_3 = 0$. Percio' $Imm(L)$ e' data da una singola equazione in uno spazio di dimensione 4, Quindi l' immagine di L ha dimensione 3. Una sua base e' ottenuta prendendo b_0, b_1, b_2 come parametri liberi, e assegnandogli i valori $1, 0, 0$ $0, 1, 0$ e $0, 0, 1$ rispettivamente. Ottenendo cosi' $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0$ che corrisponde al polinomio cotante 1, i valori $b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = -1$ che corrisponde al polinomio $x - x^3$, e i valori $b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = -1$ ottenendo il polinomio $x^2 - x^3$. Percio' una base dell'immagine di L e' data dai polinomi $1, x - x^3, x^2 - x^3$. Secondo modo per trovare la dimensione dell'immagine. Si considera la base $(1, x, x^2)$ in partenza, che e' base dello spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2, Si scrivono i polinomi $L(1), L(x), L(x^2)$ rispetto alla base di arrivo $1, x, x^2, x^3$ che e' base dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Si ottiene cosi' la matrice A $4x3$ associata ad L rispetto a queste due basi, si calcola il rango di A e' si ottiene che A ha rango 3. Il rango di A e' la dimensione dell'immagine di L che e' quindi 3, dato che $dimKer(L) + dimImm(L) = 3$ si ottiene $Ker(L) = 0$. Siano A^1, A^2, A^3. le colonne di A (che sono linearmente indipendenti). QUESTI VETTORI NON SONO BASE DELL'IMMAGINE di L PERCHE' SONO VETTORI IN $\mathbb{R}^4$ NON SONO POLINOMI.

Per ottenere una base dell' immagine di L scrivo la combinazione lineare della base $1, x, x^2, x^3$ a coefficienti le componenti della colonna A^1, e trovo un polinomio P_1, poi scrivo la combinazione lineare della base di arrivo $1, x, x^2, x^3$ a coefficienti le componenti della colonna A^2, e trovo un polinomio P_2, e scrivo la combinazione lineare della base $1, x, x^2, x^3$ a coefficienti le componenti della colonna A^3, e trovo un polinomio P_3. I polinomi P_1, P_2, P_3 sono una base dell'immagine di L.