Compito di Geometria Ingegneria Medica 6-2-2020 Trapani

Esercizio 1

Soluzione

Se W e' il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ ortogonale al vettore $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, una equazione cartesiana di W e' $ax + by + cz = 0$. Risolvendo il sistema (cioe' passando da equazioni cartesiane a parametriche) si trova una base di W, ortonormalizzandola si trova una base ortonormale v_1, v_2 di W. Ora se v e' il vettore di norma 1 appartenente a W che forma un angolo α con v_1 e $\beta = \pi/2 - \alpha$ con v_2, per la formula che collega l'angolo con il prodotto scalare avremo $< v_1, v >= cos(\alpha), < v_2, v >= cos(\beta)$ e dato che $w \in W$, avremo $< v_3, v >= 0$. Le tre equazioni $< v_1, v >= cos(\alpha), < v_2, v >= cos(\beta), < v_3, v >= 0$, sono un sistema lineare (sistema *) che ha come matrice dei coefficienti (incompleta) la matrice che ha per righe i vettori v_1, v_2, v_3. Questi vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$, quindi il sistema * ammette uno ed un solo vettore soluzione. Calcolando la soluzione si vede subito che essa ha norma 1 ed e' quindi il vettore cercato. Altro metodo, dato che $v \in W$, $v = \lambda v_1 + \mu v_2$, e dato che $< v_1, v >= cos(\alpha), < v_2, v >= cos(\beta), < v_1, v_1 >=< v_2, v_2 >= 1, < v_1, v_2 >=< v_2, v_1 >= 0$, per bilinearita' del prodotto scalare si trova $\lambda = cos(\alpha), \mu = cos(\beta)$ e conoscendo le coordinate di v_1, v_2 nella base canonica di $\mathbf{R}^3$ si possono calcolare le coordinate di v nella base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 2

Soluzione

Si scrive la conica nella forma $X^tAX + X^tb + c = 0$, si trovano gli autovalori di A, si trova una base di autovettori di norma 1 (essi saranno ortogonali per simmetria della matrice A). Questi vettori messi per colonna formano la matrice ortogonale N, poniamo $X = NX'$, sara' $b' = N^tb$ e l'equazione della conica nelle coordinate X' risultera' $X'^t\Lambda X' + X'^tb' + c = 0$, con Λ diagonale. Ponendo $X' = X'' + \alpha$ e sosituendo si trova una equazione in X''. Se $det(A) \neq 0$, (nel compito e' il caso della parabola) si puo' scegliore α in modo che l'equazione della conica in coordinate X'' non abbia termini di primo grado. Se $det(A) = 0$, e se la matrice Λ e' tale che $\lambda_{1,1} = a, \lambda_{2,2} = 0$, allora porremo $x'_1 = x''_1 + \alpha, x'_2 = x"_2$, scegliendo in modo opportuno α si puo' fare in modo che nelle coordinate X'' compaia come unico termine di primo grado il termine contenente x''_2.

Esercizio 3

Soluzione

L'applicazione L e' lineare ed e' della forma $L(P) = \alpha x P' + \beta P(1) - \beta P(0)$ con α e β numeri reali non zero. Quindi se $P = a_2x^2 + a_1x + a_0, L(P) = \alpha(2a_2)x^2 + \alpha(a_1)x + \beta(a_2 + a_1)$. Quindi $L(P) = 0$ se e solo se $a_2 = a_1 = 0$. In altre parole il nucleo di L e' costituito dai polinomi costanti, ed una base di $Ker(L)$ e' costituita dal poliomio costante 1. Quindi $dimKer(L) = 1$. Dato che $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3 segue che $dimImm(L) + dim(Ker(L) = 3$, cioe' $dim(Imm(L) = 2$. Ora $L(x) = \alpha x + \beta$, e $L(x^2) = 2\alpha x^2 + \beta$. Quindi i polinomi $\alpha x + \beta, 2\alpha x^2 + \beta$ sono polinomi non proporzionali (quindi linearmente indipendenti) appartenenti all'immagine di L, essi formano quindi una base di $Imm(L)$. Scrivendo la matrice associata ad L rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$ sia in partenza che in arrivo, si vede che tale matrice ha tre autovalori reali e distinti, quindi L e' diagonalizzabile sui reali.