Facoltà di Ingegneria
Geometria. Esame (14/2/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato.** Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione D

1) DOMANDA FILTRO punti 6 Un sottoinsieme W di $\mathbb{R}^n$ si dice sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se... Si dice sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ se... (La domanda filtro si compone di entrambe le domande) Soluzione

Un sottoinsieme W di $\mathbf{R}^n$ si dice sottospazio vettoriale se $0 \in W$, se per ogni coppia di vettori v_1 e v_2 in W la somma $v_1 + v_2$ appartiene ancora a W e per ogni numero reale λ si ha che se $v \in W$ anche $\lambda v \in W$.

Un sottoinsieme Σ di $\mathbb{R}^n$ si dice sottospazio affine se esiste un sottospazio vettoriale W in $\mathbf{R}^n$ ed un vettore u_0 in $\mathbf{R}^n$ tale che $\Sigma = W + u_0 = \{v \in \mathbf{R}^n$ tali che esiste un $w \in W$ con $v = w + u_0\}$.

Esercizio 2. Punti 10 Si consideri al variare del parametro reale α il sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha x - y - 2\alpha z = -1 - 2\alpha \\ x - 3\alpha y + 3\alpha z = 4\alpha^2 - 1 \\ x - 2y + 2z = 4\alpha + 2. \end{cases}$$

Dire per quali valori del parametro α tale sistema e' compatibile, per tali valori determinare la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni, e per gli eventuali valori per i quali tale dimensione e' strettamente positiva si determini una equazione parametrica dello spazio delle soluzioni. Soluzione

Consideriamo la matrice incompleta del sistema

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -2\alpha \\ 1 & -3\alpha & 3\alpha \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

. Si ha che $det(A) = (1 + 2\alpha)(2 - 3\alpha)$ quindi il determinante di A e' diverso da zero per $\alpha \neq -1/2$, $\alpha \neq 2/3$. Ne segue che per α diverso da $-1/2, 2/3$ la matrice e' invertibile e percio' il sistema e' compatibile qualunque sia il termine noto e la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni e' $3-$ rango di $A = 3 - 3 = 0$. (Si sarebbe pure potuto usare il metodo di Gauss portandosi appresso il parametro α ma e' molto piu' complicato e possibile fonte di errori). Invece per $\alpha = -1/2$ la matrice completa del sistema e'

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & -3/2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

. Si vede subito quindi che il sistema e' compatibile, il vettore $X = 0$ e' soluzione. Se facciamo l'eliminazione di Gauss lasciando invariata la prima riga r_1 e sostituendo r_2 con $r_2 + 2r_1$ ed r_3 con

$r_3 + 2r_1$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

. In fine in quest'ultima matrice lasciamo invariate le righe r_1 ed r_2 e sostituiamo la riga r_3 con $r_3 - 8r_2$ e troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Il rango della matrice incompleta e della matrice completa sono in questo caso entrambi 2, questo conferma il fatto che per $\alpha = -1/2$ il sistema e' compatibile. La dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni e' $3 - 2 = 1$. Le soluzioni sono $-x/2 - y + z = 0 \ -y/2 + z/2 = 0$ quindi $z = y, \ x = 0$. Una equazione parametrica per lo spazio delle soluzioni del sistema e' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per $\alpha = 2/3$ la matrice completa del sistema e'

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1 & -4/3 & -7/3 \\ 1 & -2 & 2 & 7/9 \\ 1 & -2 & 2 & 14/3 \end{pmatrix}$$

Se facciamo l'eliminazione di Gauss lasciando invariata la prima riga e sostituendo r_2 con $r_2 - 3/2r_1$ ed r_3 con $r_3 - 3/2r_1$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1 & -4/3 & -7/3 \\ 0 & -1/2 & 4 & 7/9 \\ 0 & -1/2 & 4 & 77/18 \end{pmatrix}$$

In fine lasciando inalterate in quest'ultima matrice le prime due righe e sostituendo r_3 con $r_3 - r_2$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1 & -4/3 & -7/3 \\ 0 & -1/2 & 4 & 7/9 \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice completa e' 3, il rango della matrice incompleta e' 2, percio' per $\alpha = 2/3$ il sistema e' incompatibile. (Osserviamo che un procedimento corretto di eliminazione di Gauss e' sempre ottenuto con una sequenza di passi tale che ad ogni passo c'e' uno scambio di due righe e le altre restano inalterate, oppure c'e' la moltiplicazione di una riga per un numero non zero e le altre restano inalterate oppure tutte le righe della matrice esclusa una restano inalterate e a quell'una si sostituisce lei + un multiplo di un altra riga, procedimenti diversi da quelli qui elencati sono sbagliati).

Esercizio 3. Punti 10 Si consideri il piano π in $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche $X = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e il punto p di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si verifichi che il punto non appartiene al piano e si determini il punto di intersezione del piano con la retta passante per p e ortogonale a π. Soluzione

Troviamo una equazione cartesiana del piano π. Partiamo dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-1 \\ 2 & 3 & z-3 \end{pmatrix}$$

lasciando invariata la prima r_1 e scambiando la seconda con la terza e successivamente nella matrice cosi' trovata scambiando la prima riga con la seconda troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & z-3 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-1 \end{pmatrix}$$

quindi una equazione cartesiano di π e' $y-1=0$. Si vede subito sostituendo che il punto p non appartiene a π. Percio' un vettore ortogonale a π e'

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Una equazione parametrica della retta r passante per p ed ortogonale a π e' quindi $X = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sostituendo le coordinate di un punto della retta nell'equazione cartesiana del piano troviamo $(t+2)-1=0$ cioe' $t=-1$. Il punto di intersezione Q tra r e π ha quindi coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4) Domanda delicata punti 6

Se W e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ dimostrare che $(W^\perp)^\perp = W$.

Svolgimento

Dalla definizione di spazio ortogonale, e dal fatto che il prodotto scalare e' simmetrico si vede che $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. D'altra parte lo spazio $\mathbf{R}^n$ e' somma diretta di un sottospazio e del suo ortogonale, da questo segue che $dimW^\perp = n - dimW$ e che $dim(W^\perp)^\perp = n - dimW^\perp = dimW$. Da cio' segue che $W = (W^\perp)^\perp$.