Facoltà di Ingegneria
Geometria. Esame (14/2/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda**

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione C

1) DOMANDA FILTRO punti 6 Sia A una matrice $n \times n$ si dice che un numero λ e' un autovalore di A se... Soluzione

Un numero (in generale complesso non necessariamente reale) si dice autovalore della matrice A $n \times n$ (anche essa in generale a coefficienti complessi) se esiste un vettore $X \in \mathbf{C}^n$

DIVERSO DA ZERO tale che $AX = \lambda X$. Questa condizione e' equivalente alla condizione che λ sia radice del polinomio caratteristico $t \to det(A - tI)$. In altri termini λ e' autovalore di A se e solo se e' autovalore dell'applicazione lineare $L_A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ definita da $L_A(X) = AX$. (Ricordiamo che in generale un numero λ e' autovalore dell'applicazione lineare $T : V \to V$ se esiste un vettore $v \in V$

DIVERSO DA ZERO tale che $T(v) = \lambda v$).

Esercizio 2. Punti 10 Si consideri al variare del parametro reale α il sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha x - y - z = 1 - \alpha \\ x - \alpha y + \alpha z = 2\alpha - 1 \\ x - y + \alpha z = 2\alpha - 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori del parametro α tale sistema e' compatibile, per tali valori determinare la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni, e per gli eventuali valori per i quali tale dimensione e' strettamente positiva si determini una equazione parametrica dello spazio delle soluzioni. Soluzione

Consideriamo la matrice incompleta del sistema

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ 1 & -\alpha & \alpha \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Si ha che $det(A) = -(1 + \alpha^2)(\alpha - 1)$ quindi, dato che α e' un numero reale, il determinante di A e' diverso da zero per α reale soltanto se $\alpha \neq 1$. Ne segue che per α diverso da 1 la matrice e' invertibile e percio' il sistema e' compatibile qualunque sia il termine noto e la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni e' $3 -$ rango di $A = 3 - 3 = 0$. (Si sarebbe pure potuto usare il metodo di Gauss portandosi appresso il parametro α ma e' molto piu' complicato e possibile fonte di errori). Invece per $\alpha = 1$ la matrice completa del sistema e'

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Se facciamo l'eliminazione di Gauss lasciando invariate le righe r_1 ed r_2 e sostituendo r_3 con $r_3 - r_2$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Se in questa nuova matrice lasciamo inalterate le riga r_1 ed r_3 e sostituiamo la riga r_2 con $r_2 - r_1$ troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. La matrice completa e la matrice incompleta hanno in questo caso entrambe rango 2 percio' per $\alpha = 1$ il sistema e' compatibile. La dimensione dello spazio delle sue soluzioni e' $3-2=1$, le soluzioni sono date da $x - y - z = 0$, $= 1$ e $2z = 1$ cioe' $z = 1/2$ e $x - y - 1/2 = 0$, ovvero $x = y + 1/2$, $z = 1/2$. Una equazione parametrica dello spazi affine delle soluzioni e' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

(Osserviamo che un procedimento corretto di eliminazione di Gauss e' sempre ottenuto con una sequenza di passi tale che ad ogni passo c'e' uno scambio di due righe e le altre restano inalterate, oppure c'e' la moltiplicazione di una riga per un numero non zero e le altre restano inalterate oppure tutte le righe della matrice esclusa una restano inalterate e a quell'una si sostituisce lei + un multiplo di un altra riga, procedimenti diversi da quelli qui elencati sono sbagliati).

Esercizio 3. Punti 10 Si consideri il piano π in $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche $X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e il punto p di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si verifichi che il punto non appartiene al piano e si determini il punto di intersezione del piano con la retta passante per p e ortogonale a π. Soluzione

Troviamo una equazione cartesiana del piano π. Patiamo dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-1 \\ 2 & 1 & z-3 \end{pmatrix}$$

lasciando invariata la prima r_1 e scambiando la riga r_2 con la riga r_3 , troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & z-3 \\ 0 & 0 & y-1 \end{pmatrix}$$

quindi una equazione cartesiano di π e' $y - 1 = 0$. Si vede subito sostituendo che il punto p non appartiene a π. Percio' un vettore ortogonale a π e'

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Una equazione parametrica della retta r passante per p ed ortogonale a π e' quindi $X = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sostituendo le coordinate di un punto della retta nell'equazione cartesiana del piano troviamo

$t = 1$. Il punto di intersezione Q tra r e π ha quindi coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

4) Domanda delicata punti 6 Sia O una matrice ortogonale reale $n \times n$ provare che ogni autovalore di O e' un numero complesso di modulo 1. Si consiglia di considerare il prodotto hermitiano canonico $< >$ di $\mathbf{C}^n$, e di osservare che se Z e W sono vettori colonna di $\mathbf{C}^n$ vale la formula $< OZ, OW >=< Z, W >$. Sapreste dare un esempio di una applicazione ortogonale reale che non abbia autovalori reali ?

Soluzione

Sia λ un autovalore di O, allora esiste un vettore $X \in \mathbf{C}^n$ diverso da zero tale che $OX = \lambda X$. Se ora nell'equazione $< OZ, OW >=< Z, W >$. poniamo $Z = W = X$ troviamo $< OX, OX >=< X, X >$. e quindi $< \lambda X, \lambda X >=< X, X >$. Ma il prodotto che stiamo considerando e' il prodotto hermitiano canonico quindi $< \lambda X, \lambda X >= \lambda < X, \lambda X >= \lambda\overline{\lambda} < X, X >$.

Cioe' $\lambda\overline{\lambda} < X, X >=< X, X >$. Ma dato che X non e' il vettore nullo succede che $< X, X >\neq 0$, percio' $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$.

Ogni matrice di rotazione R_θ di angolo θ diverso da 0 e diverso da π e' una matrice ortogonale reale con autovalori non reali. Ricordiamo che

$$R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$