Facoltà di Ingegneria
Geometria. Esame (14/2/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato** Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione B

1) DOMANDA FILTRO punti 6 Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una applicazione, dire cosa vuol dire che L e' una applicazione lineare.

Soluzione

L'applicazione $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e' lineare se e solo se per ogni coppia di vettori X ed Y in $\mathbb{R}^n$ e per ogni λ numero reale valgono le relazioni

$$L(X + Y) = L(X) + L(Y), L(\lambda X) = \lambda L(X).$$

Esercizio 2. Punti 10 Si consideri al variare del parametro reale α il sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x - \alpha y + \alpha z = 2\alpha \\ \alpha x - y + z = 2\alpha. \end{cases}$$

Dire per quali valori del parametro α tale sistema e' compatibile, per tali valori determinare la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni, e per gli eventuali valori per i quali tale dimensione e' strettamente positiva si determini una equazione parametrica dello spazio delle soluzioni. Soluzione

Consideriamo la matrice incompleta del sistema

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & \alpha & 2\alpha \\ \alpha & -1 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Si ha che $det(A) = -2(1 - \alpha^2)$, quindi il determinante di A e' diverso da zero per $\alpha \neq 1, \alpha \neq -1$. Ne segue che per α diverso da $1, -1$ la matrice e' invertibile e percio' il sistema e' compatibile qualunque sia il termine noto e la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni e' $3-$ rango di $A = 3-3 = 0$. (Si sarebbe pure potuto usare il metodo di Gauss portandosi appresso il parametro α ma e' molto piu' complicato e possibile fonte di errori). Invece per $\alpha = 1$ la matrice completa del sistema e'

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

. Se facciamo l'eliminazione di Gauss lasciando invariata la prima riga r_1 e sostituendo r_2 con $r_2 - r_1$, r_3 con $r_3 - r_1$ ed r_3 si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. In fine lasciando inalterate in quest'ultima matrice le righe r_1 ed r_2 e sostituendo r_3 con $r_3 - r_2$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta e della matrice completa sono in questo caso entrambi 2 il sistema e' quindi compatibile e la dimensione dello spazio delle soluzioni e' $3 - 2 = 1$. Il sistema e'

$$\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ -2y = 1 \end{matrix}$$

quindi $y = -1/2$ $z = -x + 3/2$. Una equazione parametrica dello spazio delle soluzioni e' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Per $\alpha = -1$ la matrice completa del sistema e'

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

. Se facciamo l'eliminazione di Gauss lasciando invariata la prima riga r_1 e sostituendo r_2 con $r_2 + r_1$ ed r_3 con $r_3 - r_1$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

. In fine lasciando inalterate in quest'ultima matrice le righe r_1 ed r_2 e sostituendo r_3 con $r_3 + r_2$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

. Il rango della matrice completa e' 3 mentre il rango della matrice incompleta e' 2 percio' il sistema e' incompatibile. (Osserviamo che un procedimento corretto di eliminazione di Gauss e' sempre ottenuto con una sequenza di passi tale che ad ogni passo c'e' uno scambio di due righe e le altre restano inalterate, oppure c'e' la moltiplicazione di una riga per un numero non zero e le altre restano inalterate oppure tutte le righe della matrice esclusa una restano inalterate e a quell'una si sostituisce lei + un multiplo di un altra riga, procedimenti diversi da quelli qui elencati sono sbagliati).

Esercizio 3. Punti 10 Si consideri il piano π in $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche $X = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} +$ $s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e il punto p di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si verifichi che il punto non appartiene al piano e si determini il punto di intersezione del piano con la retta passante per p e ortogonale a π. Svolgimento

Troviamo una equazione cartesiana del piano π. Partiamo dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-1 \\ 2 & 1 & z-3 \end{pmatrix}$$

Scambiamo da prima la prima e la terza riga, ottenendo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & z-3 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

. Lasciando inalterate in questa nuova matrice la prima r_1 e la seconda riga r_2 e sostituendo r_3 con $r_3 - r_2$ si ricava l'equazione cartesiana del piano $x - y + 1 = 0$. Si vede subito sostituendo che il punto p non appartiene a π. Percio' un vettore ortogonale a π e'

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Una equazione parametrica della retta r passante per p ed ortogonale a π e' quindi $X = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sostituendo le coordinate di un punto della retta nell'equazione cartesiana del piano troviamo $(t+1) - (-t+1) + 1 = 0$ cioe' $t = -1/2$ il punto di intersezione Q tra r e π ha quindi coordinate

$$-1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

4) Domanda delicata punti 6 Sia A e' una matrice simmetrica reale $n \times n$ e sia $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $L_A(X) = AX$. Dimostrare che $Imm(L_A) = (KerL_A)^{\perp}$. Si consiglia di determinare cosa e' in termini dell'applicazione L_A lo spazio ortogonale allo spazio vettoriale generato dalle righe di A, e di determinare cos'e' in termini di L_A lo spazio vettoriale generato dalle colonne di A. Soluzione

Per la definizione dei prodotto scalare e per la definizione di prodotto di matrici il nucleo della applicazione lineare L_A coincide con l'ortogonale allo spazio W generato dalle righe di A. Quindi $KerL_A = W^{\perp}$. D'altra parte sempre per la definizione di prodotto di matrici lo spazio generato dalle colonne di A coincide con l'immagine di L_A, Ma dato che la matrice e' simmetrica lo spazio generato dalle righe coincide con lo spazio generato dalle colonne, quindi $Ker(L_A) = (ImmL_A)^{\perp}$. Facendo l'ortogonale si ottiene il risultato.