# Facoltà di Ingegneria

## Geometria ingegneria medica . Esame (14/02/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato** Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda

**Giustificare le risposte**

| | |
|---|---|
| **Cognome:** | |
| **Nome:** | |

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| TOTALE | |

Versione A

**1) DOMANDA FILTRO punti 6** Dire cosa vuol dire che i vettori $v_1, \dots v_k$ sono generatori del sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^n$, Dire cosa vuol dire che i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti. Dire cosa vuol dire che i vettori $v_1 \dots v_k \in W$ sono una base di $W$. (La domanda filtro si compone di tutte e tre le domande). Soluzione

I vettori $v_1 \dots . v_k$ sono generatori del sottospazio vettoriale $W$ se appartengono a $W$ e sono tali che ogni vettore di $W$ e' loro combinazione lineare, cioe' che per ogni $w \in W$ esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$.

I vettori $v_1, \dots v_k$ di $W$ sono linearmente indipendenti se l'unico modo di ottenere il vettore 0 come loro combinazione lineare e scegliendo tutti i coefficienti della combinazione lineare uguale a 0. Cioe' se data una loro combinazione lineare $\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_k v_k = 0$ da questo segue che $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

I vettori $v_1, \dots v_k$ di $W$ sono una base di $W$ se sono simultaneamente generatori e linearmente indipendenti, questo implica che ogni vettore di $W$ si pu scrivere in un unico modo come combinazione lineare di $v_1 \dots v_k$

**Esercizio 2. Punti 10** Si consideri al variare del parametro reale $\alpha$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x + \alpha y = \alpha \\ 4x + 4y + \alpha z = \alpha \\ \alpha x + \alpha y + z = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori del parametro $\alpha$ tale sistema e' compatibile, per tali valori determinare la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni, e per gli eventuali valori per i quali tale dimensione e' strettamente positiva si determini una equazione parametrica dello spazio delle soluzioni. Soluzione

Consideriamo la matrice incompleta del sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 4 & 4 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha che $det(A) = (1 - \alpha)(4 - \alpha^2)$, quindi il determinante di $A$ e' diverso da zero per $\alpha \neq 1, \alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -2$. Ne segue che per $\alpha$ diverso da $1, -2, 2$ la matrice e' invertibile e percio' il sistema e' compatibile qualunque sia il termine noto e la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni e' $3 -$ rango di $A = 3 - 3 = 0$. (Si sarebbe pure potuto usare il metodo di Gauss portandosi appresso il parametro $\alpha$ ma e' molto pi' complicato e possibile fonte di errori). Invece per $\alpha = 1$ la matrice completa del sistema e'

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Se facciamo l'eliminazione di Gauss lasciando invariata la prima riga $r_1$ e sostituendo $r_2$ con $r_2-4r_1$ ed $r_3$ con $r_3-r_1$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. In fine lasciando inalterate in quest'ultima matrice le righe $r_1$ ed $r_2$ e sostituendo $r_3$ con $r_3-r_2$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta e' in questo caso 2 ed il rango della matrice completa e' 3, percio' per $\alpha=1$ il sistema e' incompatibile. Per $\alpha=2$ la matrice completa del sistema e'

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Se facciamo l'eliminazione di Gauss lasciando invariata la prima riga $r_1$ e sostituendo $r_2$ con $r_2-4r_1$ ed $r_3$ con $r_3-2r_1$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

. In fine lasciando inalterate in quest'ultima matrice le righe $r_1$ ed $r_2$ e sostituendo $r_3$ con $r_3-1/2r_2$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. I ranghi della matrici completa ed incompleta sono entrambi uguali a 2, percio' per $\alpha=2$ il sistema e' compatibile. La dimensione dello spazio delle sue soluzioni e' $3-2=1$, le soluzioni sono date da $x+2y=2,\ -4y+2z=-6$ cioe' $x=2-2y,\ z=2y-3$ una equazione parametrica dello spazi affine delle soluzioni e' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ Per $\alpha=-2$ la matrice completa del sistema e'

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Se facciamo l'eliminazione di Gauss lasciando invariata la prima riga $r_1$ e sostituendo $r_2$ con $r_2-4r_1$ ed $r_3$ con $r_3+2r_1$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 12 & -2 & 6 \\ 0 & -6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

. In fine lasciando inalterate in quest'ultima matrice le righe $r_1$ ed $r_2$ e sostituendo $r_3$ con $r_3+1/2r_2$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 12 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. I ranghi della matrice completa ed incompleta sono entrambi uguali a 2, percio' per $\alpha=-2$ is sistema e' compatibile.La dimensione dello spazio delle sue soluzioni e' $3-2=1$, le soluzioni sono date da $x-2y=-2,\ 12y-2z=6$ cio' $x=2y-2,\ z=6y-3$ una equazionie parametrica dello spazi affine delle soluzioni e' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ (Osserviamo che un procedimento corretto di eliminazione di Gauss e' sempre ottenuto con una sequenza di passi tale che ad ogni passo c'e' uno scambio di due righe e le altre restano inalterate, oppure c'e' la moltiplicazione di una riga per un numero non zero e le altre restano inalterate oppure tutte le righe della matrice esclusa una restano inalterate e a quell'una si sostituisce lei + un multiplo di un altra riga, procedimenti diversi da quelli qui elencati sono sbagliati).

**Esercizio 3. Punti 10** Si consideri il piano $\pi$ in $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche $X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il punto $p$ di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si verifichi che il punto non appartiene al piano e si determini il punto di intersezione del piano con la retta passante per $p$ e ortogonale a $\pi$. Soluzione

Troviamo una equazione cartesiana del piano $\pi$. Patiamo dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 2 & 2 & z-1 \end{pmatrix}$$

lasciando invariata la prima $r_1$ e la seconda riga $r_2$ , e sostituendo la terza riga $r_3$ con $r_3 - 2r_1$ troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z-2x-1 \end{pmatrix}$$

quindi una equazione cartesiano di $\pi$ e' $-2x+z-1=0$. Si vede subito sostituendo che il punto $p$ non appartiene a $\pi$. Percio' un vettore ortogonale a $\pi$ e'

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Una equazione parametrica della retta $r$ passante per $p$ ed ortogonale a $\pi$ e' quindi $X = t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sotituendo le coordinate di un punto della retta nell'equazione cartesiana del piano troviamo $-2(-2t+1)+(t+2)-1=0$ cio' $t=1/5$ il punto di intersezione $Q$ tra $r$ e $\pi$ ha quindi coordinate

$$1/5\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 11/5 \end{pmatrix}$$

.

**4) Domanda delicata punti 6** Si considerino i seguenti tre teoremi Teorema 1 Se $W$ e' sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$. Teorema 2 Se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e' lineare $dimImmL + dimKerL = n$ Teorema 3 Se $A$ e' una matrice reale $m \times n$ il suo rango per righe coincide con il suo rango per colonne. Dimostrare il teorema 3 usando i teoremi 1 e 2. Si consiglia di considerare come W lo spazio vettoriale generato dalle righe di $A$. Se $L(X) = AX$ cos'e' in termini di $L$ lo spazio vettoriale generato dalle colonne di $A$? Soluzione

Per la definizione dei prodotto scalare e per la definizione di prodotto di matrici il nucleo della applicazione lineare $L_A$ coincide con l'ortogonale allo spazio $W$ generato dalle righe di $A$. Per definizione di rango per righe $dim(W) =$ rango per righe di $A$ e d'altra parte grazie al teorema 1

$$dim(W) + dimW^{\perp} = dimW + dimKerL_A = n$$

cioe'

$$\text{rango per righe di } A \; = n - dimKerL_A. \tag{1}$$

D'altra parte sempre per la definizione di prodotto di matrici lo spazio generato dalle colonne di $A$ coincide con l'immagine di $L_A$, quindi rango per colonne di $A = dimImmL_A$. Per il teorema 2

$$n = dimKerL_A + dimImmL_A = dimKerL_A + \text{rango per colonne di } A$$

o in altri termini

$$\text{rango per colonne di } A = n - dimKerL_A. \tag{2}$$

Confrontando l'uguaglianza (2) con l'uguaglianza (1) otteniamo

$$\text{rango per righe di A} = n - dimKerL_A = \text{rango per colonne di } A,$$

abbiamo quindi dimostrato il teorema 3 usando i teoremi 1 e 2.