Foliazioni

Definition 0.1 *Siano date una varieta' M, C^∞, una distribuzione involutiva Δ di dimensione k ed una immersione iniettiva $\Psi : N \to M$ con N varieta' connessa di dimensione k. Diremo che N e' una sottovarieta' integrale di Δ se per ogni punto $q \in N$ si ha $d\Psi_q(T_q(N)) = \Delta_{\Psi(q))}$. La sottovarieta' integrale (N, Ψ) si dice massimale se per ogni altra sottovarieta' integrale (N_1, Ψ_1) di Δ tale che $\Psi_1(N_1) \bigcap \Psi(N) \neq \emptyset$ si ha che $\Psi_1(N_1) \subseteq \Psi(N)$.*

Definition 0.2 *Data una distribuzione involutiva Δ di dimensione k su M e dato $p \in M$, un intorno aperto U di p, si dice foliato rispetto a Δ, se esiste una carta coordinata $\varphi : U_p \to (-\delta, \delta)^n$ di M tale che $\varphi(p) = 0$, e tale che le sottovarieta' $\Delta_{\mathbf{c}} = \varphi^{-1}(x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, \ldots, x_n = c_n)$ sono sottovarieta' integrali di Δ per ogni $\mathbf{c} = (\mathbf{c_{k+1}}, \ldots, \mathbf{c_n}) \in (-\delta, \delta)^{\mathbf{n-k}}$. Le sottovarieta' $\Sigma_{\mathbf{c}}$ si dicono fette dell'intorno foliato U e la carta locale φ si dice carta foliata centrata in p.*

Il teorema di Frobenius ci dice che una distribuzione C^∞ Δ e' involutiva se e solo se ogni punto di M ammette un intorno foliato con la relativa carta foliata rispetto a Δ.

Proposition 0.3 *Sia (Ψ, N) una sottovarieta' integrale di Δ tale che $\Psi(N)$ e' contenuta nell'intorno foliato U, allora esiste $\mathbf{c}$ tale che $\Psi(N) \subseteq \Sigma_{\mathbf{c}}$. Inoltre $\Psi(N)$ e' un aperto di $\Sigma_{\mathbf{c}}$ e $\Psi : N \to \Psi(N)$ e' un diffeomorfismo.*

Proof.
Sia φ la corrispondente carta foliata, siano $\pi_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ e $\pi_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-k}$ le proiezioni $\pi_1(x_1, \ldots x_n) = (x_1, \ldots, x_k)$ e $\pi_2(x_1, \ldots, x_n) = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Sia $\varphi_2 = \pi_2 \circ \varphi$. Essendo N e $\Sigma_{\mathbf{c}}$ sottovartieta' integrali di Δ, si ha che il differenziale $d(\varphi_2 \circ \Psi)$ e' identicamente nullo su N. Essendo N connesso $\varphi_2 \circ \Psi$ e' costante, cioe' $\Psi(N) \subseteq \Sigma_{\mathbf{c}}$ per qualche $\mathbf{c} \in (-\delta, \delta)^{\mathbf{n-k}}$. Essendo N e $\Sigma_{\mathbf{c}}$ varieta' connesse di dimensione k, con $\Sigma_{\mathbf{c}}$ embedded in M, ed essendo Ψ una immersione iniettiva, segue dal teorema di inversione locale che $\Psi(N)$ e' un aperto in $\Sigma_{\mathbf{c}}$ e $\Psi : N \to \Psi(N)$ e' un diffeomorfismo.
■

Lemma 0.4 *Sia S un insieme non vuoto connesso al piu' numerabile di $\mathbf{R}^n$, allora S e' un punto.*

Proof. Procediamo per induzione su n, se $n = 1$ ogni connesso non vuoto in $\mathbf{R}$ e' un intervallo, l'unico intervallo al piu' numerabile e' un punto. Supponiamo l'asserto vero per $n - 1$ e sia $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ la proiezione sulle prime $n - 1$ coordinate, allora $\pi(S)$ e' connesso non vuoto al piu' numerabile in $\mathbf{R}^{n-1}$, ed e' per ipotesi induttiva un punto. Quindi S e' omeomorfo ad un sottoinsieme al piu' numerabile connesso di $\mathbf{R}$.
■

Proposition 0.5 *Sia* (Ψ, N) *una sottovarieta' integrale di* Δ*, e sia* U *un intorno foliato, siano* $\{U_i\}_{i\in I}$ *le componenti connesse di* $\Psi^{-1}(U)$*. Gli insiemi* $\{\Psi(U_i)\}_{i\in I}$ *sono allora le componenti connesse di* $U\bigcap\Psi(N)$*. In particolare tali componenti connesse sono una famiglia al piu' numerabile.*

Proof. Gli insieme $\Psi(U_i)$ sono connessi disgiunti, non vuoti e ricoprono tutto $\Psi(N)\bigcap U$. Sia $\{L_h\}_{h\in H}$ la famiglia delle componenti connesse di $\Psi(N)\bigcap U$. Sia R_h l'insieme degli indici $i\in I$ tali che $\Psi(U_i)\subseteq L_h$. Ogni R_h e' non vuoto e al piu' numerabile. Inoltre $L_h=\bigcup_{i\in R_h}\Psi(U_i)$. Dalla proposizione 0.3 segue che per ogni $i\in R_h$ esiste $\mathbf{c_i}\in(-\delta,\delta)^{\mathbf{n-k}}$ tale che $\varphi_2\circ\Psi(U_i)\equiv\mathbf{c_i}$, quindi $\varphi_2(L_h)=\bigcup_{i\in R_h}\mathbf{c_i}$. D'altra parte $\varphi_2(L_h)$ e' connesso, e dal lemma 0.4 segue che $\varphi_2(L_h)$ e' un punto per ogni $h\in H$. Quindi esiste $\mathbf{c}\in(-\delta,\delta)^{\mathbf{n-k}}$ tale che se $i\in R_h$ abbiamo $\Psi(U_i)\subseteq L_h\subseteq\Sigma_{\mathbf{c}}$. D'altra parte dalla proposizione 0.3 sappiamo che $\Psi(U_i)$ e' aperto in $\Sigma_{\mathbf{c}}$, ed e' quindi aperto in L_h. Dato che gli insiemi $\Psi(U_i),\ i\in R_h$ sono disgiunti e ricoprono L_h, segue dalla connessione di L_h che $R_h=\{i_0\}$ e' un solo punto e $\Psi(U_{i_0})=L_h$.
■

Proposition 0.6 *Sia* (Ψ, N) *una sottovarieta' integrale di* Δ*, sia* T *una varieta' differenziabile, e sia* $\alpha: T\to N$ *una mappa, allora* α *e' continua se e solo se lo e'* $\Psi\circ\alpha$*, ed* α *e'* C^∞ *se e solo se lo e'* $\Psi\circ\alpha$*.*

Proof. Dato che Ψ e C^∞ se α e' continua o C^∞ lo e' anche $\Psi\circ\alpha$. Viceversa, supponiamo $\Psi\circ\alpha$ continua, dato $q\in T$ prendiamo un intorno foliato U di $\Psi(q)$. Sia V un intorno aperto connesso di q tale che $\Psi\circ\alpha(V)\subset U$. Si ha che $\Psi\circ\alpha(V)\subseteq\Psi(N)\bigcap U$, e percio' dalla proposizione 0.5 $\Psi\circ\alpha(V)\subset\Psi(U_i)$ per qualche $i\in I$. Dato che Ψ e' iniettiva se ne deduce che $\alpha(V)\subset U_i$. D'altra parte dalla proposizione 0.3 la mappa $\Psi: U_i\to\Psi(U_i)$ e' un diffeomorfismo. Ne segue che α ristretta a V e' continua, rispettivamente C^∞ se lo e' $\Psi\circ\alpha$. Dato che V e' un intorno di un punto arbitrario, segue l'asserto. ■

Proposition 0.7 *Se* (Ψ_1, N_1)*,* (Ψ_2, N_2) *sono sottovarieta' integrali massimali della distribuzione* Δ *tali che* $\Psi_1(N_1)\bigcap\Psi_2(N_2)\neq\emptyset$*, allora* $\Psi_1(N_1)=\Psi_2(N_2)$ *ed esiste un diffeomorfismo* $\theta: N_1\to N_2$ *tale che* $\Psi_1=\Psi_2\circ\theta$*.*

Proof.
Per la massimalita' di (Ψ_2, N_2), se $\Psi_1(N_1)\bigcap\Psi_2(N_2)\neq\emptyset$, allora $\Psi_1(N_1)\subset\Psi_2(N_2)$, e dalla massimalita' di (Ψ_1, N_1) si deduce che $\Psi_2(N_2)=\Psi_1(N_1)$. Dato che Ψ_1 e Ψ_2 sono iniettive, esiste una mappa biunivoca $\theta: N_1\to N_2$ tale che $\Psi_1=\Psi_2\circ\theta$ e $\Psi_2=\Psi_1\circ\theta^{-1}$. Segue allora dalla proposizione 0.6 che θ e' un diffeomorfismo. ■

Vorremmo ora dimostrare che per ogni punto $p\in M$ esiste una sottovarieta' integrale massimale (connessa) (Ψ_p, N_p) di Δ tale che $p\in\Psi_p(N_p)$. Ne seguira' che le (immagini delle) sottovarieta' integrali massimali connesse di Δ formano una partizione di M. Dato un punto p in M costruiamo da prima la varieta' N_p come insieme. L'insieme N_p e' per definizione l'insieme dei punti $q\in M$ tali che esiste una curva γ, C^1 a tratti che collega p con q e tale che il vettore derivata $\gamma'(t)$ appartiene all sottospazio $\Delta_{\gamma(t))}\subseteq T_{\gamma(t)}(M)$ per ogni t nell'intervallo di definizione di γ, per il quale il vettore γ' e' definito. Quindi N_p contiene p. D'altra parte se $q\in N_p$, e γ e' una curva

C^1 a tratti tangente alla distribuzione che collega q con r, allora possiamo collegare p con r con una curva C^1 a tratti tangente alla distribuzione. Similmente se si puo' collegare p con s mediante una curva C^1 a tratti tangente alla distribuzione, si puo' anche collegare q con s mediante una tale curva. In altri termini se $q \in N_p$ allora $N_p = N_q$, percio' se $r \in N_p \bigcap N_q$ allora $N_p = N_r = N_q$.

Proposition 0.8 *Se (Ψ, N) e' una sottovarieta' integrale (connessa) di Δ e se $\Psi(N) \bigcap N_p \neq \emptyset$ allora $\Psi(N) \subseteq N_p$. In particolare se U e' un intorno foliato e $\Sigma_{\mathbf{c}}$ e' una fetta in U tale che $\Sigma_{\mathbf{c}} \bigcap N_p \neq \emptyset$, allora $\Sigma_{\mathbf{c}} \subseteq N_p$.*

Proof. Se $q = \Psi(n) \in \Psi(N) \bigcap N_p$, allora $N_p = N_q$. Se γ e' una curva C^1 in N che collega n con n_1 allora $\Psi \circ \gamma$ e' una curva C^1 in M tangente alla distribuzione che collega q con $\Psi(n_1)$, quindi $\Psi(n_1) \in N_q$. ∎

Vediamo come definire la topologia di N_p. Scegliamo un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ al piu' numerabile di intorni foliati in M con le relativa carte locali φ_i. Tale ricoprimento esiste grazie al teorema di Frobenius. Consideriamo la seguente famiglia di insieme $\mathbf{B}$. Un insieme Ω e' in $\mathbf{B}$ se esiste un indice $i \in I$ ed un $\mathbf{c} \in (-\delta_{\mathbf{i}}, \delta_{\mathbf{i}})^{\mathbf{n-k}}$ tale che la fetta $\Sigma_{\mathbf{c}}$ nell'aperto foliato U_i e' contenuta in N_p e Ω e' un aperto di $\Sigma_{\mathbf{c}}$ nella topologia indotta su $\Sigma_{\mathbf{c}}$ da M.

Proposition 0.9 *La famiglia delle fette di qualche intorno U_i contenute in N_p ricopre N_p, inoltre la famiglia di insiemi $\mathbf{B}$ e' una base di aperti per una topologia su N_p. Tale topologia risulta piu' fine della topologia indotta su N_p da M. In particolare se dotiamo N_p della topologia individuata da $\mathbf{B}$ l'inclusione $i : N_p \to M$ e' continua e lo spazio topologico N_p e' di Hausdorff.*

Proof. Se $q \in N_p$, sia $q \in U_i$, e sia $\Sigma_{\mathbf{c}}$ una fetta in U_i che contiene q, dalla proposizione 0.8 sappiamo che $\Sigma_{\mathbf{c}} \subseteq N_p$, quindi le fette dei vari U_i che sono contenute in N_p ricoprono N_p. Se $q \in B_1 \cap B_2$ con $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$, sia $B_1 \subseteq \Sigma_{\mathbf{c_1}}$ fetta dell'aperto foliato U_1 e $B_2 \subseteq \Sigma_{\mathbf{c_2}}$ fetta dell'aperto foliato U_2. Sia V un intorno aperto connesso in $\Sigma_{\mathbf{c_1}}$ contenente q e contenuto in $B_1 \cap U_2$. Allora (i, V) dove i e' l'inclusione, e' una sottovarieta' integrale di Δ contenuta in U_2 e contenente q. Per la proposizione 0.8 V e' un aperto in $\Sigma_{\mathbf{c_2}}$, percio' $V \cap B_2$ e' un aperto in $\Sigma_{\mathbf{c_2}}$ contenente q e contenuto in $B_1 \cap B_2$. Cioe' la famiglia $\mathbf{B}$ e' una base di aperti di una topologia. Se W e' un aperto di N_p con la topologia indotta da M, allora W e' unione degli insiemi $W \cap U_i$. D'altra partie $W \cap U_i = \bigcup (W \cap \Sigma^i_{\mathbf{c}})$ dove $\Sigma^i_{\mathbf{c}}$ sono le varie fette dell'intorno foliato U_i contenute in N_p. Se ne ricava che W e' aperto nella topologia su N_p che ha per base $\mathbf{B}$. Quindi l'inclusione $i : N_p \to M$ e' continua. Se allora q_1 e q_2 sono punti distinti di N_p e U_1, U_2 sono intorni aperti disgiunti di q_1 e q_2 in M rispettivamente, otteniamo che $i^{-1}(U_1)$ e $i^{-1}(U_2)$ sono intorni disgiunti di q_1 e q_2 in N_p. ∎

D'ora in poi chiameremo topologia intrinseca di N_p la topologia data dalla base $\mathbf{B}$ e topologia indotta quella indotta da M.

Proposition 0.10 *Lo spazio topologico N_p con la topologia intrinseca e' connesso per archi.*

Proof. La dimostrazionie e' simile a quella della proposizione 0.8. Sia $q \in N_p$ e sia $\gamma : [0,1] \to M$ una curva C^1 a tratti in M tangente alla foliazione che collega p con q, quindi $\gamma([0,1]) \subseteq N_p$. Sara' sufficiente provare che γ e' continua per la topologia intrinseca di N_p. Sia $t_0 \in [0,1]$ e $\gamma(t_0) = q_0 \in U$. Dove U con carta foliata φ e' un aperto foliato del ricoprimento attraverso il quale si e' definita la topologia intrinseca di N_p. Sia $q_0 \in \Sigma_{\mathbf{c_0}}$. Sia V un intorno connesso di t_0 in $[0,1]$ tale che $\gamma(V) \subset U$. Con le notazioni della proposizione 0.3 abbiamo che il differenziale di $\pi_2 \circ \varphi \circ \gamma$ e' nullo, quindi $\gamma(V)$ e' contenuto in $\Sigma_{\mathbf{c_0}}$. Ma $\Sigma_{\mathbf{c_0}}$ e' un aperto nella topologia intrinseca di N_p. D'altra parte la topologia indotta da M e la topologia intrinseca coincidono su $\Sigma_{\mathbf{c_0}} \subseteq N_p$. Quindi γ e' continua per la topologia intrinseca di N_p. ■

Lemma 0.11 *Siano U_{j_1} e U_{j_2} due aperti del ricoprimento numerabile usato per definire la topologia intrinseca di N_p. Sia Σ_1 una fetta di U_{j_1}, Sia $\{V_s\}_{s\in S}$ la famiglia delle componenti connesse di $\Sigma_1 \cap U_{j_2}$. L'insieme S e' al piu' numerabile, inoltre la famiglia $\{V_s\}_{s\in S}$ coincide con la famiglia delle componenti connesse degli insiemi non vuoti della forma $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ dove Σ_2 e' una fetta di U_{j_2}. In particolare la famiglia delle fette di U_{j_2} che intersecano Σ_1 e' al piu' numerabile.*

Proof.

L'insieme S e' al piu' numerabile perche' indicizza l'insieme delle componenti connesse di un aperto omeomorfo ad un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$. Ogni V_s e' una sottovarieta' integrale di Δ in U_{j_2} quindi per il lemma 0.3 e' contenuta in qualche Σ_2 fetta in U_{j_2}. Anzi tale fetta interseca Σ_1 e V_s e' contenuta in una componente connessa di tale intersezione. Viceversa ogni componente connessa di un insieme non vuoto del tipo $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ con Σ_2 fetta di U_{j_2} deve essere contenuto in qualche V_s. ■

Lemma 0.12 *Sia U_{i_0} un aperto del ricoprimento numerabile usato per definire la topologia intrinseca di N_p, allora la famiglia di fette di U_{i_0} contenute in N_p e' al piu' numerabile.*

Proof. Fissiamo ora una famiglia finita $U_0, U_1, \dots U_N$ di intorni (non necessariamente distinti) del ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ tale che $p \in U_0$, ed $U_N = U_{i_0}$. Sia Σ_0 la fetta di U_0 che contiene p. Sia F_1 la famiglia di tutte le fette di U_1 che intersecano Σ_0, per il lemma 0.11, la famiglia F_1 e' al piu' numerabile. Sia F_2 la famiglia di tutte le fette di U_2 che intersecano Σ_0 oppure intersecano qualche fetta della famiglia F_1. La famiglia F_2 e' sempre per il lemma 0.11 unione al piu' numerabile di insiemi al piu' numerabili, ed e' quindi al piu' numerabile. Consideriamo la famiglia F_3 che contiene tutte le fette di U_3 che intersecano Σ_0 o qualche fetta della famiglia F_1 o qualche fetta della famiglia F_2, la famiglia F_3 e' al piu' numerabile, cosi' procedendo proviamo che la famiglia F_N e' al piu' numerabile. Consideriamo in fine la famiglia F unione di tutte le famiglie F_N al variare delle famiglie finite di intorni del ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ come sopra. Dato che le famiglie finite di un insieme al piu' numerabile formano ancora un insieme al piu' numerabile, risulta che F e' una famiglia al piu' numerabile. Affermo che la famiglia F contiene la famiglia di tutte le fette in U_{i_0} contenute in N_p. Sia Σ' una fetta di U_{i_0} contenuta in N_p e sia $q \in \Sigma'$. Sia $\gamma : [0,1] \to N_p$ una curva C^1 a tratti tangente alla distribuzione che collega p con q. Sia $U_0, U_1, \dots U_N$ una famiglia finita di intorni del ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ come sopra che ricopre $\gamma([0,1])$. Tale famiglia esiste perche' $\gamma([0,1])$ e' compatto. Sia t_1 l'estremo superiore dell'insieme dei $t \in [0,1]$ tali che $\gamma([0,t]) \subseteq U_0$. Se $\gamma([0,1])$ non e' contenuto in U_0, $t_1 > 0$, e riordinando gli intorni posso supporre $\gamma(t_1) \in U_1$, quindi $\gamma(t_1) \in \Sigma_1$, dove Σ_1 e' una fetta di U_1 con U_1 diverso da U_0. Quindi per ε piccolo abbiamo $\gamma((t_1 - \varepsilon, t_1))$ e' contenuto in $\Sigma_0 \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$. Se $\gamma([0,1])$ non e' contenuto in $U_0 \cup U_1$, sia t_2 l'estremo superiore dell'insieme dei $t \in [0,1]$ tali che $\gamma([0,t]) \subseteq U_0 \cup U_1$. Allora $t_2 > t_1$, e possiamo supporre $\gamma(t_2) \in U_2$, con U_2 diverso da U_0 e da U_1. Quindi $\gamma(t_2) \in \Sigma_2$ fetta di U_2 tale che $\Sigma_2 \cap (\Sigma_0 \cup \Sigma_1) \neq \emptyset$. Cosi' procedendo otteniamo che $\gamma([0,1]) \subseteq U_0 \cup U_1 \ldots \cup U_k$ con $k \leq N$. Dove la famiglia $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots \Sigma_k$ ha la proprieta' seguente: $p \in \Sigma_0$, $q \in \Sigma_k$, Σ_i e' una fetta di U_i, e per ogni h tra 0 e k, $\Sigma_h \cap (\cup_{0 \leq i \leq h-1} \Sigma_i) \neq \emptyset$. Se $k = N$ si ha che $\Sigma_N = \Sigma'$, se $k < N$ abbiamo $q = \gamma(1) \in \Sigma_k \cap \Sigma_N \neq \emptyset$. In tal caso consideriamo la famiglia di intorni $U_0, \ldots U_k, U_N$. Comunque per quanto visto sopra la fetta Σ' appartiene alla famiglia F.

■

Proposition 0.13 *La topologia intrinseca di N_p ha una base numerabile di aperti.*

Proof. Per ogni $i \in I$, la famiglia delle fette di U_i contenute in N_p e', per il Lemma 0.12 al piu' numerabile. Dato che il ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ e' al piu' numerabile, la famiglia di tutte le fatte di qualche U_i contenute in N_p e' anch'essa al piu' numerabile. Scegliendo allora una base numerabile di aperti per ogni tale fetta, la famiglia costituita da tutti questi insiemi e' una base numerabile di aperti di N_p. ■

Ora vorremmo definire delle carte per N_p, dal Lemma 0.9 sappiamo che le fette di qualche U_i contenute in N_p sono un ricoprimento aperto di N_p con la topologia intrinseca. Sia U_i un aperto del ricoprimento di M con la relativa carta $\varphi_i : U_i \to (-\delta_i, \delta_i)^n$. Sia Σ_1 una fetta di U_i contenuta in N_p. Con le notazioni di 0.3 definiamo la carta $\theta : \Sigma_1 \to (-\delta_i, \delta_i)^k$ come $\theta = \pi_1 \circ \varphi_i$. Quindi θ e' un omomorfismo topologico.

Proposition 0.14 *Per l'atlante su N_p definito sopra i cambiamenti di carte sono C^∞. Per la struttura di varieta' C^∞ cosi' definita su N_p l'inclusione i e' una immersione iniettava. Inoltre $p \in N_p$ e la coppia (i, N_p) e' una sottovarieta' integrale massimale di Δ. Chiameremo questa struttura di varieta' C^∞ su N_p la struttura intrinseca.*

Proof.

Siano U_1, U_2 aperti del ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$, siano Σ_1, Σ_2 fette in U_1, U_2 rispettivamente contenute in N_p e tali che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. Siano φ_1 e φ_2 le carte per M associate ad U_1, U_2. Siano θ_1, θ_2 le corrispondenti carte per N_p associate a Σ_1, Σ_2. Sia $W_{1,2} = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, e $W_{2,1} = \varphi_1(U_1 \cap U_2)$. Similmente posiamo $H_{1,2} = \theta_2(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$, e $H_{2,1} = \theta_1(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$. Abbiamo quindi $\varphi_2(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = H_{1,2} \times \{\mathbf{c_2}\}$ e $\varphi_1(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = H_{2,1} \times \{\mathbf{c_1}\}$. Inoltre $H_{1,2}$ ed $H_{2,1}$ sono aperti in $\mathbf{R}^k$. Sia $F_{1,2} : W_{1,2} \to W_{2,1}$ la mappa $F_{1,2} = \varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1}$, e sia $g_{1,2} : H_{1,2} \to H_{2,1}$ la mappa $g_{1,2} = \theta_1 \circ {\theta_2}^{-1}$. La mappa $F_{1,2}$ e' C^∞ per ipotesi. Quindi per $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ si ha che

$$(g_{1,2}(\theta_2(x)), \mathbf{c_1}) = (\boldsymbol{\theta_1}(\mathbf{x}), \mathbf{c_1}) = \boldsymbol{\varphi_1}(\mathbf{x}) = \mathbf{F_{1,2}}(\boldsymbol{\varphi_2}(\mathbf{x})) = \mathbf{F_{1,2}}(\boldsymbol{\theta_2}(\mathbf{x}), \mathbf{c_2}).$$

Da cui $g_{1,2}(y) = \pi_1 \circ F_{1,2}(y, \mathbf{c_2})$ per $y \in H_{1,2}$, in particolare $g_{1,2}$ e' C^∞ e, scambiando 1 e 2 si trova che $g_{1,2}$ e' un diffeomorfismo.

Sie $\Sigma_{\mathbf{c}}$ una fetta in U_j contenuta in N_p l'inclusione $i : N_p \to M$ e' una immersione iniettiva, infatti $\varphi \circ i \circ \theta^{-1}(x) = (x, \mathbf{c})$ per $x \in (-\delta, \delta)^k$. Inoltre $p \in N_p$ e per la proposizione 0.8 (i, N_p) e' una varieta' integrale massimale per Δ. ■

Proposition 0.15 *Sia U un intorno foliato di M con $U \cap N_p \neq \emptyset$. (Non necessariamente facente parte del ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ usato per definire la topologia intrinseca di N_p). Allora ogni fetta di U che interseca N_p e' contenuta in $U \cap N_p$ e l'inclusione della fetta in N_p con la struttura intrinseca e' un embedding con immagine aperta. In particolare ogni fetta e' chiusa aperta e connessa nella topologia intrinseca di $U \cap N_p$. Quindi la famiglia di tali fette e' la famiglia (al piu' numerabile) delle componenti connesse di $U \cap N_p$ con la topologia intrinseca. D'altra parte tale famiglia e' anche la famiglia delle componenti connesse (chiuse ma non necessariamente aperte) di $U \cap N_p$ nella topologia indotta su $U \cap N_p$ da M.*

Proof.

Dalla proposizione 0.8 sappiamo che se una fetta di U interseca N_p essa e' contenuta in N_p. Sia Σ una fetta di U contenuta in N_p, per la proposizione 0.6 e per il teorema di inversione locale, l'inclusione della fetta in N_p con la struttura intrinseca e' un embedding con immagine aperta e connessa. D'altra parte l' unione di tutte le altre fette e' un aperto nella stessa topologia, quindi Σ e' anche chiusa in $U \cap N_p$, percio' le fette di U che intersecano N_p sono le componenti connesse di $U \cap N_p$ nella topologia intrinseca. Dalla proposizione 0.5 esse sono anche le componenti connesse nella topologia indotta su N_p da M.

■

Definition 0.16 *Data M varieta' differenziabile di dimensione n e dato h intero compreso tra 1 ed $n-1$, una partizione $\{K_j\}_{j \in J}$ di M si dice foliazione di dimensione h in M se valgono le condizioni seguenti:*

i) Per ogni $j \in J$ esiste su K_j una struttura di varieta' differenziabile connessa di dimensione h tale che l'inclusione $i : K_j \to M$ e' una immersione (iniettiva). Chiameremo questa struttura di varieta' differenziabile su K_j la struttura intrinseca di K_j
ii) Dato $p \in M$, esiste una carta locale C^∞ $\varphi : U_p \to (-\delta, \delta)^n$ di M tale che per ogni $\mathbf{c} \in (-\delta, \delta)^{n-k}$ la fetta $\Sigma_{\mathbf{c}} = \varphi^{-1}(x_{k+1} = c_{k+1}, \ldots x_n = c_n)$ e' contenuta in uno (ed uno solo) dei sottoinsiemi K_j.
iii) L'inclusione di $\Sigma_{\mathbf{c}}$ in K_j con la struttura intrinseca e' un embedding (con immagine aperta).

Un intorno U come nella definizione sopra lo chiameremo intorno foliato relativo alla foliazione $\{K_j\}_{j \in J}$. Un elemento della partizione si chiamera' foglia della foliazione.

Data una foliazione $\{K_j\}_{j \in J}$ di dimensione h, per ogni $p \in M$, se $p \in K_j$, definiamo $\Delta_p = di_p(T_p(K_j)) \subseteq T_p(M)$. Allora Δ e' una distribuzione in M di dimensione h. e la chiameremo distribuzione tangente alla foliazione.

Proposition 0.17 *La distribuzione tangente ad una foliazione e' una distribuzione C^∞ involutiva.*

Proof. Scegliamo U un intorno foliato della foliazione con relativa carta φ. Poniamo $X_j = d(\varphi^{-1})(\frac{\partial}{\partial x_j})$ per $1 \leq j \leq h$, i campi vettoriali X_j sono campi C^∞ linearmente indipendenti in tutti i punti di U che generano la distribuzione Δ su U. Quindi la distribuzione Δ e' C^∞. Inoltre

$$[X_i, X_j] = [d(\varphi^{-1})(\frac{\partial}{\partial x_i}), d(\varphi^{-1})(\frac{\partial}{\partial x_j})] = d(\varphi^{-1})[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0.$$

Quindi la distribuzione e' involutiva. ■

Potremmo sintetizzare quanto detto fino ad ora nel seguente

Theorem 0.18 *L'applicazione che assegna ad ogni foliazione di dimensione h la sua distribuzione tangente e' una applicazione biunivoca dall'insieme delle foliazioni di dimensione h all'insieme delle distribuzioni C^∞ involutive di dimensione h.*

Proof.
La proposizione 0.17 dice che tale applicazione e' ben definita, la costruzione delle sottovarieta' integrali massimali di una distribuzione C^∞ involutiva fatta sopra dice che tale applicazione e' suriettiva. Sia allora $\{K_j\}_{j\in J}$ una foliazione di dimensione h, e sia Δ la sua distribuzione tangente. Sia $\{H_s\}_{s\in S}$ la foliazione delle sottovarieta' integrali massimali della distribuzione Δ costruita sopra, dobbiamo far vedere che queste due foliazioni coincidono. Dato un H_{s_0} esiste j tale che $K_j \cap H_{s_0} \neq \emptyset$. Essendo K_j sottovarieta' integrale di Δ, ed essendo H_{s_0} massimale, $K_j \subseteq H_{s_0}$. Per la proposizione 0.6 e per il teorema di inversione locale K_j e' un aperto di H_{s_0}, tutti i K_j contenuti in H_{s_0} sono allora aperti disgiunti la cui unione e' H_{s_0}. Per la connessione di H_{s_0} esiste un unico tale j che chiamo j_0. Ogni punto di H_{s_0} deve appartenere a qualche K_l quindi $K_{j_0} = H_{s_0}$. Dato j_0, per quanto visto sopra, esiste un unico s_0 tale che $H_{s_0} \cap K_{j_0} \neq \emptyset$ e si ha $K_{j_0} = H_{s_0}$. Dato che (i, H_{s_0}) e (i, K_{j_0}) sono foglie integrali di Δ con la stessa immagine, dove le due inclusioni sono immersioni iniettive, per la proposizione 0.6 $Id : K_{j_0} \to H_{s_0}$ e' un diffeomorfismo. ■

Vorremo ora capire sotto quali condizioni una data foglia di una foliazione e' embedded in M, cioe' sotto quali condizioni la topologia intrinseca e la topologia indotta da M su tale foglia coincidono. Dai risultati precedenti sappiamo che la foglia K_0 e' embedded se e solo se esiste un ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ di K_0 con intorni foliati tale che, per ogni $i \in I$, ogni fetta di U_i contenuta in K_0 e' aperta nella topologia indotta su K_0 da M.

Dobbiamo ricordare alcuni concetti di topologia.

Definition 0.19 *Uno spazio topologico X si dice spazio di Baire se data una famiglia $\{F_n\}$ al piu' numerabile di chiusi tale che l'unione delle F_n ha una parte interna non vuota, si ha che almeno un elemento della famiglia ha parte interna non vuota. .*

Ad esempio ogni spazio metrico completo e' uno spazio di Baire, ed ogni aperto di uno spazio di Baire e' uno spazio di Baire. Ricordiamo che uno spazio topologico e' localmente compatto se ogni suo punto ha un sistema fondamentale di intorno compatti, ed e' localmente connesso se ogni suo punto ha un sistema fondamentale di intorno connessi. Ad esempio ogni varieta' C^∞ e' uno spazio di Hausdorff localmente compatto e localmente connesso. In uno spazio localmente connesso le componenti connesse di ogni suo aperto Ω sono sia chiuse che aperte in Ω. Un sottoinsieme S di uno spazio topologico X si dice localmente chiuso in X se per ogni punto p di S esiste un intorno aperto U di p in X tale che $U \cap S$ e' chiuso in U. Un insieme S e' localmente chiuso in X se e solo se esiste un aperto Ω in X contenente S tale che S e' chiuso in Ω. Ogni insieme S localmente chiuso in uno spazio di Hausdorff localmente compatto e anche esso di Hausdorff e localmente compatto (con la topologia indotta da X). Ricordiamo ad esempio che se X e' una varieta' C^∞ e S e' una sottovarieta' embedded in X, allora S e' localmente chiuso in X. Infatti S e' localmente intersezione di luoghi di zeri di funzioni C^∞. Ricordiamo inoltre che in uno spazio di Hausdorff ogni sottoinsieme compatto e' chiuso.

A noi serve il seguente:

Theorem 0.20 *Ogni spazio topologico X di Hausdorff localmente compatto e' uno spazio di Baire*

Proof. Passando ai complementari si vede che uno spazio X e' di Baire se e solo se, data in X una famiglia A_n al piu' numerabile di aperti densi, la loro intersezione e' densa. Supponiamo da prima la famiglia finita, formata dagli aperti $\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$. Se Ω e' aperto non vuoto in X, allora $\Omega \cap A_1$ e' un aperto non vuoto, dato che A_1 e' denso, quindi $(\Omega \cap A_1) \cap A_2$ e' un aperto non vuoto dato che A_2 e' denso, e cos' procedendo si conclude nel caso di una famiglia finita. Supponiamo allora la famiglia infinita.

Dato che A_1 e' denso $A_1 \cap \Omega$ e' un aperto non vuoto, esiste quindi, per locale compattezza, un aperto non vuoto V_1 tale che $\overline{V_1}$ e' compatto e $\overline{V_1} \subseteq A_1 \cap \Omega$.

Dato che A_2 e' denso esiste un aperto non vuoto V_2 tale che $\overline{V_2}$ e' compatto e $\overline{V_2} \subseteq V_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \cap A_2 \cap \Omega$.

Dato che A_3 e' denso esiste un aperto non vuoto V_3 tale che $\overline{V_3}$ e' compatto e $\overline{V_3} \subseteq V_2 \cap A_3 \subseteq A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \Omega$.

Cosi' procedendo troviamo una successione di aperti $\{V_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ tali che $\overline{V_j}$ e' compatto,

$\overline{V_{j+1}} \subseteq V_j$, quindi

$\overline{V_j} \subseteq \bigcap_{1 \le s \le j} \overline{V_s}$. In particolare

$\bigcap_{s \in \mathbf{N}} \overline{V_s} \subseteq \Omega \cap \bigcap_{s \in \mathbf{N}} A_s$.

Basta percio' dimostrare che

$\bigcap_{s \in \mathbf{N}} \overline{V_s} \neq \emptyset$.

Ora, per ogni $s \in \mathbf{N}$, $\overline{V_s} \subseteq \overline{V_1}$ e

$\overline{V_1}$ e' compatto, inoltre

$\overline{V_{s+1}} \subseteq \overline{V_s}$. Sia

$U_s = \overline{V_1} \setminus \overline{V_s}$.

Ogni U_s e' un aperto di $\overline{V_1}$, e

$$U_s \subseteq U_{s+1}. \tag{1}$$

Se avessimo $\bigcap_{s \in \mathbf{N}} \overline{V_s} = \emptyset$, avremmo $\bigcup_{s \in \mathbf{N}} U_s = \overline{V_1}$. Per compattezza di $\overline{V_1}$, e per la (1), avremmo che esiste s_0 per cui $U_{s_0} = \overline{V_1}$, cioe' $\overline{V_{s_0}} = \emptyset$.

Otteniamo cosi' una contraddizione.

∎

Sia ora K_0 la foglia di una foliazione in M, abbiamo la seguente

Proposition 0.21 *Per la foglia K_0 i fatti seguenti sono equivalenti:*

1) *La foglia K_0 e' embedded in M*
2) *La foglia K_0 e' localmente chiusa in M*
3) *Con la topologia indotta da M la foglia K_0 e' uno spazio topologico localmente compatto*
4) *Con la topologia indotta da M la foglia K_0 e' uno spazio topologico di Baire*
5) *Con la topologia indotta da M la foglia K_0 e' uno spazio topologico localmente connesso*

Proof. Sappiamo che 1) implica 5), e dalla Proposizione 0.15 sappiamo anche che 5) implica 1) dato che se vale 5) tutte le foglie degli intorno foliati che intersecano K_0 sono allora aperte in K_0 nella topologia indotta da M. D'altra parte abbiamo visto che 1) implica 2), 2) implica 3), 3) implica 4) resta da vedere che 4) implica 1). Nel seguito della dimostrazione considereremo sempre la topologia di K_0 indotta da M. Sia Σ_0 una fetta in un intorno foliato U con carta locale associata φ contenuta in K_0. Dico che se Σ ho un punto p interno in K_0 allora Σ e' un aperto di K_0. Sia $\pi_1(\varphi(p)) = x_0, \pi_2(phi(p) = c_0$. Se un punto q di Σ non fosse interno a K_0 si avrebbe una successione $q_n \in K_0$ convergente a q con $\pi_2(\varphi_(q_n)) = c_n$ con $c_n \neq c_0$, e c_n tendente a c_0. Ma allora il punto $\varphi^{-1}(x_0, c_n)$ sarebbe un punto appartenente alla fetta che contiene q_n, quindi appartenente a K_0, non appartenente a Σ_0. Ma la successione $\varphi^{-1}(x_0, c_n)$ converge a p, si ottiene cosi' una contraddizione. Ora sia p_0 un punto interno a Σ_0 fetta dell'intorno foliato U_0 contenuto in K_0 e sia r un punto di K_0 appartenente alla foglia Σ' nell'intorno foliato V. Abbiamo visto nella dimostrazione della proposizione 0.12 che esiste una catena di fette $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots \Sigma_N$, degli intorno foliati $U_0, U_1, \dots, U_N = V$ rispettivamente, tale che $\Sigma_N = \Sigma'$ e tale che ogni fetta interseca l'unione delle precedenti. Dato che p_0 e' interno a Σ_0, la fetta Σ_0 e' aperta in K_0. Se $p_1 \in \Sigma_0 \cap \Sigma_1$ esiste un intorno connesso W aperto in Σ_0, contenente p_1, e contenuto in $\Sigma_0 \cap U_1$. Quindi W sara' contenuto in Σ_1 per la proposizione 0.3. Essendo Σ_0 aperto in K_0 anche W lo e'. Quindi p_1 e' un punto interno di Σ_1 nella foglia K_0, percio' Σ_1 e' aperto in K_0. Cosi' procedendo si ottiene che $\Sigma_N = \Sigma'$ e' aperto in K_0. Ne segue che ogni fetta contenuta in K_0 di ogni intorno foliato e' aperta in K_0, quindi K_0 e' embedded. Resta percio' da vedere che dato un intorno foliato U che interseca K_0 esiste almeno una fetta contenuta in K_0 che abbia un punto interno inı K_0. Dall'ipotesi 4), essendo U aperto in M, segue che $U \cap K_0$ e' uno spazio di Baire. Ma sappiamo dalla Proposizione 0.15 che le fette di U che intersecano K_0 sono le componenti connesse di $U \cap K_0$ e sono una famiglia al piu' numerabile, inoltre ogni tale componente connessa e' chiusa in $U \cap K_0$, percio' almeno una di queste componenti connesse ammette punti interni in K_0. ■

ESEMPI

Esempio 1

Siano M ed N varieta' C^∞ di dimensione $n+h$ ed n rispettivamente, sia $F : M \to N$ una mappa C^∞ tale che il differenziale di F ha rango n in tutti i punti. Allora la partizione $\{K_q\}_{q \in N}$ con $K_q = F^{-1}(q)$ e' per il teorema del rango una foliazione di dimensione h in M la cui distribuzione tangente e' data da $\Delta_p = KerdF_p$. Tutte le foglie di questa foliazione sono chiuse quindi embedded.

Esempio 2

Sia α un numero reale non razionale. Consideriamo su $\mathbf{R}^2$ il campo vettoriale costante di componenti 1 α. Sia T lo spazio quoziente $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ con la topologia quoziente, identificato con il toro $S^1 \times S^1$ attraverso la mappa

$$(x, y) \to (exp(2\pi ix), exp(2\pi iy)).$$

Sia $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ la proiezione canonica. Dato che l'azione di $\mathbf{Z}^2$ su $\mathbf{R}^2$ e' per traslazioni, e' definito il campo vettoriale C^∞ mai nullo su T dato da $v_p = d\pi_x(1, \alpha)$ se $\pi(x) = p$. Se consideriamo la distribuzione unidimensionale Δ_p sul toro data da $\Delta_p = \mathbf{R}v_p$, questa distribuzione e' C^∞ involutiva e ogni foglia della foliazione associata e' densa nel toro e non contiene aperti del toro, quindi nessuna foglia e' localmente chiusa, in particolare nessuna foglia e' embedded.