

NOME: MATRICOLA:

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2009/2010
Analisi Reale e Complessa, Esame del 15.02.2010

1) Si verifichi che la formula

$$F(s) := \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(sx)}{1+x^2} dx, \quad s \in \mathbb{R}$$

definisce una funzione continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che è derivabile in ogni punto $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Si calcoli la derivata $F'(s)$ per ogni $0 \neq s \in \mathbb{R}$.

2) Esiste una funzione olomorfa $f(z)$ definita sul piano complesso tale che, per $z = x + iy$,

$$\operatorname{Re} f(z) = (\cos x)(\operatorname{ch} y) - x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x - x^2 + y^2 ?$$

Nel caso affermativo si trovino tutte tali funzioni f .

3) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{1+x^3} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ 0 < \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{-r}^{-1-\varepsilon} \frac{e^{i\pi x}}{1+x^3} dx + \int_{-1+\varepsilon}^r \frac{e^{i\pi x}}{1+x^3} dx \right)$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzioni:

1) : Siccome

$$\left| \frac{\operatorname{arctg}(sx)}{1+x^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \geq 0, s \in \mathbb{R}$$

e la funzione $\frac{1}{1+x^2}$ è integrabile su $[0, +\infty)$, la funzione F è ben definita e, per di più, per il teorema della convergenza dominata risulta anche la sua continuità, cioè che vale

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(s_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(s_n x)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(s_n x)}{1+x^2}}_{= \frac{\operatorname{arctg}(sx)}{1+x^2}} \right) dx \\ &= F(s) \end{aligned}$$

per ogni successione convergente $s_n \rightarrow s$ in \mathbb{R} .

La derivabilità di $F(s)$ sotto il segno dell'integrale è possibile in ogni $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Infatti, esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\operatorname{arctg}(sx)}{1+x^2} = \frac{x}{(1+x^2)(1+s^2x^2)}, \quad x \geq 0, s \in \mathbb{R}$$

e, per $x \geq 0, s \in \mathbb{R}, |s| \geq \varepsilon > 0$, abbiamo la maggiorazione

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \frac{\operatorname{arctg}(sx)}{1+x^2} \right| = \frac{1}{s} \frac{|sx|}{(1+x^2)(1+s^2x^2)} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{1+x^2}$$

dove la funzione $\frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{1+x^2}$ è integrabile su $[0, +\infty)$. Così F risulta derivabile in ogni $0 \neq s \in \mathbb{R}$ ed abbiamo

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\operatorname{arctg}(sx)}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+s^2x^2)} dx.$$

Per calcolare l'integrale alla parte destra ci conviene la riduzione del grado del polinomio nel denominatore tramite la sostituzione $t = x^2$, suggerita dalla presenza del fattore $x = \frac{1}{2}(x^2)'$ nel numeratore :

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+t)(1+s^2t)} dt .$$

Se $s^2 \neq 1$ allora (come visto nell'Analisi 1) abbiamo la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{2(1+t)(1+s^2t)} = \frac{1}{2(1-s^2)} \cdot \frac{1}{1+t} - \frac{s^2}{2(1-s^2)} \cdot \frac{1}{1+s^2t}$$

e risulta

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{1}{2(1-s^2)} \left(\ln(1+t) - \ln(1+s^2t) \right) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} \\ &= \frac{1}{2(1-s^2)} \ln \frac{1+t}{1+s^2t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{2(1-s^2)} \ln \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{\ln s^2}{2(s^2-1)} = \frac{\ln |s|}{s^2-1} : \end{aligned}$$

Infatti, sappiamo che esistono costanti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{2(1+t)(1+s^2t)} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1+s^2t}$$

e queste costanti si calcolano come segue :

$$\frac{1}{2} = a(1+s^2t) + b(1+t) = (as^2+b)t + a+b$$

implica

$$\begin{cases} as^2 + b = 0 \\ a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e questo sistema di equazioni lineari ha la soluzione unica

$$a = \frac{1}{1-s^2}, \quad b = -\frac{s^2}{1-s^2} .$$

Se invece $s^2 = 1$, allora otteniamo subito

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+t)^2} dt = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{2},$$

Concludiamo che, per ogni $0 \neq s \in \mathbb{R}$, F è derivabile in s ed abbiamo

$$F'(s) = \begin{cases} \frac{\ln |s|}{s^2 - 1} & \text{per } s^2 \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{per } s^2 = 1 \end{cases}.$$

Rimarchiamo che F è addirittura continuamente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Infatti,

$$\lim_{s \rightarrow \pm 1} F'(s) = \lim_{s \rightarrow \pm 1} \frac{\ln s^2}{2(s^2 - 1)} \stackrel{r=s^2-1}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(1+r)}{2r} = \frac{1}{2} = F'(\pm 1).$$

Approfondimento.

È naturale chiedersi se la funzione F di cui sopra è derivabile anche in 0 o no. Chiaramente, F' ha limite $+\infty$ in 0:

$$\lim_{s \rightarrow 0} F'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln |s|}{s^2 - 1} = +\infty.$$

Questo però non dimostra la nonderivabilità di F in 0: potrebbe essere che F sia derivabile in 0 solo che F' non è continua in questo punto. Resta quindi il problema: esiste il limite

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s) - F(0)}{s - 0} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(sx)}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(sx)}{sx} \cdot \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(|s|x)}{|s|x} \cdot \frac{x}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

e, se esiste, è finito?

Dimostreremo in seguito che questo limite esiste ed è $+\infty$. A questo fine minoreremo la funzione

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto \frac{\operatorname{arctg}(|s|x)}{|s|x} \cdot \frac{x}{1+x^2} \quad (*)$$

con una funzione dipendente pure dal parametro s , che potremo però integrare su $(0, +\infty)$ esplicitamente e di cui integrale su $(0, +\infty)$ avrà limite $+\infty$ per $s \rightarrow 0$.

Ricordiamo la disuguaglianza nota

$$\sin \alpha < \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

che implica

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < \frac{\alpha}{\cos \alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

e poi

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} > \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Ponendo $y = \operatorname{tg} \alpha \iff \alpha = \operatorname{arctg} y$, otteniamo

$$\frac{\operatorname{arctg} y}{y} > \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad y > 0.$$

Ora abbiamo la minorazione della funzione (??)

$$\frac{\operatorname{arctg}(|s|x)}{|s|x} \cdot \frac{x}{1 + x^2} > \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 x^2}} \cdot \frac{x}{1 + x^2}$$

e risulta per ogni $s \in \mathbb{R}$ con $0 < s^2 < 1$: prima

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(|s|x)}{|s|x} \cdot \frac{x}{1 + x^2} dx &\geq \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1 + x^2)\sqrt{1 + s^2 x^2}} dx \\ & \stackrel{u = \sqrt{1 + s^2 x^2}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 + s^2 - 1}, \end{aligned}$$

e poi, usando la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{u^2 + s^2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{1 - s^2}} \left(\frac{1}{u - \sqrt{1 - s^2}} - \frac{1}{u + \sqrt{1 - s^2}} \right),$$

la disuguaglianza

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(|s|x)}{|s|x} \cdot \frac{x}{1+x^2} dx &\geq \frac{1}{2\sqrt{1-s^2}} \ln \frac{u - \sqrt{1-s^2}}{u + \sqrt{1-s^2}} \Big|_{u=1}^{u=+\infty} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-s^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-s^2}}{1 - \sqrt{1-s^2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-s^2}} \ln \frac{(1 + \sqrt{1-s^2})^2}{1 - (1-s^2)} \\
&= \frac{\ln(1 + \sqrt{1-s^2}) - \ln|s|}{\sqrt{1-s^2}}.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{1-s^2}) - \ln s}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\ln 2 - \ln(+0)}{1} = +\infty,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s) - F(0)}{s - 0} &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(|s|x)}{|s|x} \cdot \frac{x}{1+x^2} dx \\
&\geq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{1-s^2}) - \ln s}{\sqrt{1-s^2}} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Rimarchiamo che

- la funzione F è dispari e
- poiché $F'(s) > 0, 0 \neq s \in \mathbb{R}$, F è strettamente crescente.

Poi, usando il teorema della convergenza dominata, si verifica anche l'esistenza dei limiti

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} F(s) = \pm \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \pm \frac{\pi^2}{4}.$$

Perciò abbiamo tutte le informazioni per tracciare un grafico qualitativo di F :

F ha l'asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi^2}{4}$ per $x \rightarrow -\infty$, cresce strettamente fino al punto $x = 0$ dove si annulla ed ha tangente verticale, poi continua a crescere strettamente ed avvicina sempre di più l'asintoto orizzontale $y = \frac{\pi^2}{4}$ per $x \rightarrow +\infty$.

È istruttivo un confronto con il grafico dell'arcotangente: il grafico di F ha un andamento simile al grafico dell'arcotangente, ma l'arcotangente ha gli asintoti orizzontali $y = \pm \frac{\pi}{2}$ ed il suo tangente in $x = 0$ è $y = x$.

2) : La funzione $u(x, y)$ definita sul piano complesso tramite la formula

$$u(x, y) = (\cos x)(\operatorname{ch} y) - x^2 + y^2$$

può essere la parte immaginaria di una funzione olomorfa se e solo se è armonica. Verifichiamo che è così:

Anzitutto le derivate parziali di v di primo ordine sono:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -(\sin x)(\operatorname{ch} y) - 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (\cos x)(\operatorname{sh} y) + 2y$$

Risultano

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) = -(\cos x)(\operatorname{ch} y) - 2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = (\cos x)(\operatorname{ch} y) + 2$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Ora l'armonicità di u implica che la forma differenziale

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy$$

è chiusa e, poiché il piano complesso è convesso, anche esatta. Se $v(x, y)$ è una primitiva della forma differenziale ω , cioè una funzione differenziabile $v(x, y)$ sul piano complesso tale che

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y),$$

allora per la funzione $f(z) := u(x, y) + v(x, y)i$ valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, quindi f sarà una funzione olomorfa avendo la parte reale uguale a u .

Di conseguenza dobbiamo risolvere il sistema di equazioni a derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -(\cos x)(\operatorname{sh} y) - 2y \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -(\sin x)(\operatorname{ch} y) - 2x \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int \left(-(\cos x)(\operatorname{sh} y) - 2y \right) dx \\ &= -(\sin x)(\operatorname{sh} y) - 2xy + C(y) \end{aligned}$$

ove $C(y)$ è una funzione di solo y . Troviamo successivamente $C(y)$ tale che anche la seconda equazione sia soddisfatta, cioè tale che

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -(\sin x)(\operatorname{ch} y) - 2x + C'(y)$$

sia uguale a

$$-(\sin x)(\operatorname{ch} y) - 2x.$$

Risulta che $C'(y)$ deve annullarsi identicamente e quindi $C(y)$ dev'essere una costante reale C .

Concludiamo che le funzioni $f(z)$ con la parte reale uguale ad u sono della forma

$$\begin{aligned} f(z) &= (\cos x)(\operatorname{ch} y) - x^2 + y^2 + \left(-(\sin x)(\operatorname{sh} y) - 2xy + C \right) i \\ &= \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) \cos x - i \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) \sin x \\ &\quad - \underbrace{(x^2 - y^2 + 2xyi)}_{= z^2} + Ci \\ &= \frac{1}{2} \left(e^y (\cos x - i \sin x) + e^{-y} (\cos x + i \sin x) \right) - z^2 + Ci \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(e^y e^{-ix} + e^{-y} e^{ix} \right) - z^2 + Ci \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{y-ix} + e^{-y+ix} \right) - z^2 + Ci \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{-i(x+iy)} + e^{i(x+iy)} \right) - z^2 + Ci = \frac{1}{2} (e^{-iz} + e^{iz}) - z^2 + Ci \\
&= \cos z - z^2 + Ci,
\end{aligned}$$

ove C è una costante reale.

3) : La funzione

$$f(z) := \frac{e^{i\pi z}}{1+z^3}$$

è meromorfa sul piano complesso, con poli semplici nelle radici cubiche di -1 , cioè in $z_o = -1$, $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{z}_1$. Il residuo di f in z_o è

$$\operatorname{Res}_{z_o}(f) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2} = \frac{e^{-i\pi}}{3} = -\frac{1}{3},$$

mentre il residuo di f in z_1 è

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z_1}(f) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z-z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{e^{i\pi z}}{(z-z_o)(z-z_2)} \\
&= \frac{e^{i\pi z_1}}{(z_1-z_o)(z_1-z_2)} = \frac{e^{i\pi \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{2} \cdot i\sqrt{3}} = \frac{ie^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}{\frac{3(\sqrt{3}+i)}{2} i} \\
&= \frac{1}{6} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} (\sqrt{3}-i).
\end{aligned}$$

Indichiamo, per $w \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, con $\partial^+ U_r^+(w)$ e $\partial^- U_r^+(w)$ le curve con lo stesso sostegno uguale al semicerchio superiore

$$\{z \in \mathbb{C}; |z-w| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\},$$

la prima orientata in senso antiorario (positivo), mentre la seconda in senso orario (negativo) :

$$\begin{aligned}
\partial^+ U_r^+(w) &\text{ è la curva } [0, \pi] \ni t \mapsto w + r e^{it} \in \mathbb{C}, \\
\partial^- U_r^+(w) &\text{ è la curva } [0, \pi] \ni t \mapsto z_o + r e^{\pi-it} = w - r e^{-it} \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Siano adesso $0 < \varepsilon < 1 < r$ e consideriamo la curva chiusa regolare a tratti $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

- il segmento $[-r, -1 - \varepsilon]$,
- il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(-1)$,
- il segmento $[-1 + \varepsilon, r]$,
- il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Poiché $\gamma_{\varepsilon,r}$ aggira il solo polo z_1 , per il teorema dei residui abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} (1 + i\sqrt{3}) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1}(f) \\ &= \int_{\gamma_{\varepsilon,r}} f(z) dz \\ &= \int_{-r}^{-1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\partial^- U_\varepsilon^+(-1)} f(z) dz + \int_{-1+\varepsilon}^r f(x) dx + \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z) dz \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^{-1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{-1+\varepsilon}^r f(x) dx \\ &= \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} (1 + i\sqrt{3}) + \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} f(z) dz - \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z) dz \end{aligned}$$

Ora per il lemma di Jordan vale

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{e^{i\pi z}}{1+z^3} dz = 0$$

e risulta

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^r f(x) dx \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} (1 + i\sqrt{3}) + \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} f(z) dz \\
&= \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} (1 + i\sqrt{3}) + \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{e^{i\pi z}}{1+z^3} dz \\
&= \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} (1 + i\sqrt{3}) + \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{1}{1+z} \left(\frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2} + \frac{1}{3} \right) dz \\
&\quad - \frac{1}{3} \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{1}{1+z} dz \\
&= \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} (1 + i\sqrt{3}) + \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{1}{1+z} \left(\frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2} + \frac{1}{3} \right) dz - \frac{\pi}{3} i .
\end{aligned}$$

Successivamente, poiché la funzione

$$g(z) = \frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2} + \frac{1}{3}$$

è olomorfa sul disco $U_1(-1) = \{z \in \mathbb{C}; |z+1| < 1\}$ e si annulla nel centro $z = -1$, esiste una funzione olomorfa h su $U_1(-1)$ tale che

$$g(z) = (z+1)h(z), \quad z \in U_1(-1).$$

Risulta che la funzione

$$\frac{1}{1+z} \left(\frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{g(z)}{1+z} = h(z)$$

è limitata in un intorno di -1 e di conseguenza

$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{1}{1+z} \left(\frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2} + \frac{1}{3} \right) dz = 0.$$

Concludiamo :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{1+x^3} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ 0 < \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{-r}^{-1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{-1+\varepsilon}^r f(x) dx \right) \\
&= \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} (1 + i\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3} i \\
&= \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + i \frac{\pi}{3} (\sqrt{3} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} - 1).
\end{aligned}$$

Commento:

La dimostrazione dell'uguaglianza

$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{e^{i\pi z}}{1+z^3} dz = -\frac{\pi}{3} i \quad (*)$$

può essere fatta in un ambito più generale, dimostrando :

Lemma del piccolo cerchio. *Siano*

- $w \in \mathbb{C}, r > 0, 0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi,$
- $U_r(w) = \{z \in \mathbb{C}; |z - w| < r\}$
- f una funzione olomorfa su $U_r(w) \setminus \{0\}$ avendo polo semplice in w .
- Γ_ε l'arco $[t_1, t_2] \ni t \mapsto w + \varepsilon e^{it}$ ove $0 < \varepsilon < r$.

Allora

$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz = (t_2 - t_1) i \operatorname{Res}_w(f).$$

Dimostrazione. Lo sviluppo di f in serie di Laurent è dalla forma

$$f(z) = c_{-1} \frac{1}{z-w} + c_0 + c_1(z-w) + c_2(z-w)^2 + \dots$$

con $c_{-1} = \operatorname{Res}_w(f)$, quindi

$$g(z) = f(z) - \operatorname{Res}_w(f) \frac{1}{z-w} = c_0 + c_1(z-w) + c_2(z-w)^2 + \dots$$

è una funzione olomorfa su tutto $U_r(w)$. In particolare g è limitata sul disco chiuso $\overline{U_{r'}(w)}$ dove $0 < r' < r$ è un numero alla nostra scelta (per esempio, possiamo prendere $r' = r/2$).

Ora

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma_\varepsilon} |g(z)| d|z| \\
 &\leq \sup_{z \in \overline{U_{r'}(w)}} |g(z)| \cdot \text{lunghezza}(\Gamma_\varepsilon) \\
 &= \varepsilon (t_2 - t_1) \sup_{z \in \overline{U_{r'}(w)}} |g(z)|, \quad 0 < \varepsilon < r'
 \end{aligned}$$

implica

$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z) dz = 0$$

e, poiché

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-w} dz = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon e^{it} i dt = (t_2 - t_1) i,$$

concludiamo che

$$\begin{aligned}
 \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz &= \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} g(z) dz + \text{Res}_w(f) \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-w} dz \right) \\
 &= (t_2 - t_1) i \text{Res}_w(f).
 \end{aligned}$$

■

In particolare, con $t_1 = 0$ e $t_2 = \pi$ risulta

$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial^+ U_r^+(w)} f(z) dz = \pi i \text{Res}_w(f)$$

e così riotteniamo (??) :

$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial^+ U_r^+(-1)} \frac{e^{i\pi z}}{1+z^3} dz = \pi i \text{Res}_{-1} \left(\frac{e^{i\pi z}}{1+z^3} \right) = -\frac{\pi}{3} i.$$