

NOME: MATRICOLA:

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2009/2010
Analisi Reale e Complessa, Esame del 25.01.2010

1) Si può applicare il teorema della convergenza dominata al calcolo dei limiti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^2 t e^{-t \sqrt[3]{x}} dx, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^2 t e^{-tx} dx ?$$

Si giustifichi la risposta.

2) Si verifichi che la funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(s) := \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, \quad s > 0$$

è derivabile ed ammette limite finito in 0. Si calcoli F' e si trovi il valore dell'integrale $F(s)$ per ogni $s > 0$.

3) Esiste una funzione olomorfa f sul semipiano superiore aperto tale che

$$\operatorname{Im} f(z) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)} ?$$

Nel caso affermativo si trovino tutte tali funzioni f .

4) Dato $b > 0$, si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ 0 < \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzioni:

- 1) : Discuteremo il problema generale dell'applicabilità del teorema della convergenza dominata al calcolo del limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^2 t e^{-tx^\alpha} dx$$

ove α è un parametro reale.

Il teorema della convergenza dominata si applica se esiste una funzione integrabile $g : [0, 2] \rightarrow [0, +\infty)$ tale che la dominazione

$$t e^{-tx^\alpha} \leq g(x), \quad x \in [0, 2]$$

sia soddisfatta per tutti i $t \in \mathbb{R}$ (almeno) da un t_o in poi, cioè tale che

$$\sup_{t > t_o} (t e^{-tx^\alpha}) \leq g(x), \quad x \in [0, 2] \quad (*)$$

valga per un $t_o \in \mathbb{R}$. Allora, tenendo conto che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-tx^\alpha} = 0, \quad x > 0,$$

abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^2 t e^{-tx^\alpha} dx = \int_0^2 \underbrace{\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-tx^\alpha} \right)}_{=0} dx = 0.$$

Ma per ogni $x > 0$ la funzione

$$(0, +\infty) \ni t \mapsto t e^{-tx^\alpha}$$

ha un punto di massimo assoluto $t(x) = \frac{1}{x^\alpha}$:

Infatti, $\frac{d}{dt} (t e^{-tx^\alpha}) = e^{-tx^\alpha} + t e^{-tx^\alpha} (-x^\alpha) = e^{-tx^\alpha} (1 - t x^\alpha)$
implica

t	0	$1/x^\alpha$	$+\infty$
$\frac{d}{dt} (t e^{-tx^\alpha})$	+	0	-
$t e^{-tx^\alpha}$	0	\nearrow $1/e x^\alpha$	\searrow 0

Risulta che

$$\sup_{t>0} \left(t e^{-tx^\alpha} \right) \leq t(x) e^{-t(x)x^\alpha} = \frac{1}{e x^\alpha}, \quad x \in [0, 2],$$

cioè per $t_o = 0$ (??) è verificata con $g(x) = \frac{1}{e x^\alpha}$.

Ora, per $\alpha < 1$ la funzione $g(x) = \frac{1}{e x^\alpha}$ è integrabile su $[0, 2]$ e quindi il teorema della convergenza dominata si applica :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^2 \underbrace{t e^{-tx^\alpha}}_{\leq 1/e x^\alpha} dx = \int_0^2 \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-tx^\alpha} \right) dx = 0.$$

In particolare, per $\alpha = \frac{1}{3}$ abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^2 \underbrace{t e^{-t \sqrt[3]{x}}}_{\leq 1/e \sqrt[3]{x}} dx = \int_0^2 \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t \sqrt[3]{x}} \right) dx = 0.$$

Per $\alpha = 1$ invece non possiamo applicare il teorema della convergenza dominata. Infatti, se si potesse applicarlo, allora avremmo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^2 t e^{-tx} dx = \int_0^2 \underbrace{\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-tx} \right)}_{=0} dx = 0,$$

mentre per calcolo diretto risulta

$$\begin{aligned} \int_0^2 t e^{-tx} dx &= -e^{-tx} \Big|_{x=0}^{x=2} = 1 - e^{-2t}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^2 t e^{-tx} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-2t}) = 1. \end{aligned}$$

- 2) : L'esistenza del limite $\lim_{0 < s \rightarrow 0} F(s) = 0$ si può ottenere usando il teorema della convergenza dominata :

Siccome

$$\varphi \leq \operatorname{tg} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{cioè} \quad \operatorname{arctg} y \leq y, \quad y \geq 0,$$

vale la condizione di dominazione

$$\frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \leq \frac{s \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = s \leq 1, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

per ogni $0 < s \leq 1$. Ora la funzione costante 1 è integrabile su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e per il teorema della convergenza dominata risulta

$$\lim_{0 < s \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(\lim_{0 < s \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \right)}_{=0} dx = 0.$$

La derivabilità di $F(s)$ sotto il segno dell'integrale è possibile perché la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{1 + s^2 \operatorname{tg}^2 x} \leq 1$$

esiste e la funzione costante 1, che la maggiora, è integrabile su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Così F è derivabile in ogni $s > 0$ ed abbiamo

$$F'(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + s^2 \operatorname{tg}^2 x} dx.$$

Il calcolo dell'integrale alla parte destra si riduce all'integrazione di una funzione razionale usando la sostituzione $t = \operatorname{tg} x \iff x = \operatorname{arctg} t$:

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + s^2 t^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2} dt$$

Se $s \neq 1$ allora (come visto nell'Analisi 1) abbiamo la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{1 + s^2 t^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2} = \frac{1}{1 - s^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2} - \frac{s^2}{1 - s^2} \cdot \frac{1}{1 + s^2 t^2}$$

e risulta

$$\begin{aligned}
 F'(s) &= \frac{1}{1-s^2} \operatorname{arctg} t \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{s}{1-s^2} \operatorname{arctg}(st) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} \\
 &= \frac{1}{1-s^2} \frac{\pi}{2} - \frac{s}{1-s^2} \frac{\pi}{2} = \frac{1-s}{1-s^2} \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+s} :
 \end{aligned}$$

Infatti, sappiamo che esistono costanti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{1+s^2t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{1+s^2t^2}$$

e queste costanti si calcolano come segue :

$$\begin{aligned}
 1 &= (at+b)(1+s^2t^2) + (ct+d)(1+t^2) \\
 &= (as^2+c)t^3 + (bs^2+d)t^2 + (a+c)t + b+d
 \end{aligned}$$

implica

$$\begin{cases} as^2+c=0 \\ bs^2+d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

e dalla prima e la terza equazione risulta $a=c=0$, mentre la seconda e la quarta equazione hanno come soluzione

$$b = \frac{1}{1-s^2}, \quad d = -\frac{s^2}{1-s^2}.$$

Se invece $s=1$, allora (usando il metodo di integrazione della funzione

$\frac{1}{(1+t^2)^2}$ imparato nell'Analisi 1) si ottiene

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \left(\frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{4},$$

quindi anche in questo caso vale

$$F'(s) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+s} :$$

Tramite integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+t^2} dt &= \frac{t}{1+t^2} - \int t \left(-\frac{2t}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{t}{1+t^2} + \int \frac{2t^2 + 2 - 2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt - 2 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt\end{aligned}$$

e da questa relazione si esprime

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt &= \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t .\end{aligned}$$

Concludiamo che F è una primitiva della funzione

$$(0, +\infty) \ni s \mapsto \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+s}$$

e così della forma $F(s) = \frac{\pi}{2} \ln(1+s) + C$. Ma, poiché $\lim_{0 < s \rightarrow 0} F(s) = 0$, la costante C deve annullarsi e risulta

$$F(s) = \frac{\pi}{2} \ln(1+s), \quad s > 0 .$$

3) : La funzione $v(x, y)$ definita sul semipiano superiore aperto tramite la formula

$$v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$$

può essere la parte immaginaria di una funzione olomorfa solo se è armonica. Verifichiamola :

Anzitutto le derivate parziali di v di primo ordine sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= 2x + \frac{y}{2(x^2 + y^2)^2} 2x = 2x + \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} , \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= -2y - \frac{1}{2(x^2 + y^2)^2} 2x + \frac{y}{2(x^2 + y^2)^2} 2y\end{aligned}$$

$$= -2y + \frac{y^2 - x^2}{2(x^2 + y^2)^2} .$$

Risultano

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) &= 2 + \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^3} 2x \\ &= 2 + \frac{y^3 - 3x^2 y}{(x^2 + y^2)^3} , \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) &= -2 + \frac{2y}{2(x^2 + y^2)^2} - \frac{2(y^2 - x^2)}{2(x^2 + y^2)^3} 2y \\ &= -2 + \frac{3x^2 y - y^3}{2(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0 .$$

Ora l'armonicit  di v implica che la forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dx - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dy$$

  chiusa e, poich  il semipiano superiore aperto   convesso, anche esatta. Se $u(x, y)$   una primitiva della forma differenziale ω , cio  una funzione differenziabile $u(x, y)$ sul semipiano superiore aperto tale che

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

allora per la funzione $f(z) := u(x, y) + v(x, y)i$ valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, quindi f sar  una funzione olomorfa avendo la parte immaginaria uguale a v .

Di conseguenza dobbiamo risolvere il sistema di equazioni a derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -2y + \frac{y^2 - x^2}{2(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -2x - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases} .$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \left(-2x - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy \\ &= -2xy - \frac{x}{2} \int \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy \\ &= -2xy + \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + C(x) \end{aligned}$$

ove $C(x)$ è una funzione di solo x . Troviamo successivamente $C(x)$ tale che anche la prima equazione sia soddisfatta, cioè tale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= -2y + \frac{1}{2(x^2 + y^2)} - \frac{x}{2(x^2 + y^2)^2} 2x + C'(x) \\ &= -2y + \frac{y^2 - x^2}{2(x^2 + y^2)^2} + C'(x) \end{aligned}$$

sia uguale a

$$-2y + \frac{y^2 - x^2}{2(x^2 + y^2)^2} .$$

Risulta che $C'(x)$ deve annullarsi identicamente e quindi $C(x)$ dev'essere una costante reale C .

Concludiamo che le funzioni $f(z)$ con la parte immaginaria uguale a v sono della forma

$$\begin{aligned} f(z) &= -2xy + \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + C + \left(3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \right) i \\ &= -2xy + (x^2 - y^2)i + \frac{x - yi}{2(x^2 + y^2)} + 3i + C \\ &= i(x^2 - y^2 + 2xyi) + \frac{1}{2(x + yi)} + 3i + C \\ &= iz^2 + \frac{1}{2z} + 3i + C , \end{aligned}$$

ove C è una costante reale.

4) : Indichiamo

$$f(z) := \frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \frac{e^{iz}}{z} , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, bi, -bi\} .$$

Allora f è una funzione meromorfa sul piano complesso con poli semplici in 0 , bi e $-bi$. Il residuo di f in 0 è

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} e^{iz} = -1 ,$$

mentre il residuo di f in $\pm bi$ è

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \pm bi) &= \lim_{z \rightarrow \pm bi} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \pm bi} (z \mp bi) \frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \frac{e^{iz}}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm bi} \frac{z^2 - b^2}{z \pm bi} \frac{e^{iz}}{z} = \frac{-2b^2}{\pm 2bi} \frac{e^{\mp b}}{\pm bi} \\ &= e^{\mp b} . \end{aligned}$$

Indichiamo pure, per $r > 0$, con $\partial^+ U_r^+(0)$ e $\partial^- U_r^+(0)$ il semicerchio

$$\{z \in \mathbb{C}; |z| = r, \text{Im} z \geq 0\}$$

orientato in senso antiorario (positivo) rispettivamente in senso orario (negativo) :

$$\partial^+ U_r^+(0) \text{ è la curva } [0, \pi] \ni t \mapsto r e^{it} \in \mathbb{C} ,$$

$$\partial^- U_r^+(0) \text{ è la curva } [0, \pi] \ni t \mapsto r e^{\pi - it} = -r e^{-it} \in \mathbb{C} .$$

Siano adesso $0 < \varepsilon < b < r$ e consideriamo la curva chiusa regolare a tratti $\gamma_{\varepsilon, r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r, -\varepsilon]$,

il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(0)$,

il segmento $[\varepsilon, r]$,

il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Poiché $\gamma_{\varepsilon, r}$ aggira il solo polo bi , per il teorema dei residui abbiamo

$$\begin{aligned} 2\pi i e^{-b} &= 2\pi i \text{Res}(f, bi) \\ &= \int_{\gamma_{\varepsilon, r}} f(z) dz \\ &= \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\partial^- U_\varepsilon^+(0)} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^r f(x) dx + \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z) dz \end{aligned}$$

quindi

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^r f(x) dx = 2\pi i e^{-b} + \int_{\partial^+ U_{\varepsilon}^+(0)} f(z) dz - \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z) dz .$$

Ora per il lemma di Jordan vale

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{z^2 - b^2}{(z^2 + b^2)z} e^{iz} dz = 0$$

e risulta

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^r f(x) dx \right) \\ &= 2\pi i e^{-b} + \int_{\partial^+ U_{\varepsilon}^+(0)} f(z) dz \\ &= 2\pi i e^{-b} + \int_{\partial^+ U_{\varepsilon}^+(0)} \frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= 2\pi i e^{-b} + \int_{\partial^+ U_{\varepsilon}^+(0)} \frac{1}{z} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} e^{iz} + 1 \right) dz - \int_{\partial^+ U_{\varepsilon}^+(0)} \frac{1}{z} dz \\ &= 2\pi i e^{-b} + \int_{\partial^+ U_{\varepsilon}^+(0)} \frac{1}{z} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} e^{iz} + 1 \right) dz - \pi i . \end{aligned}$$

Successivamente, poiché esiste il limite

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} e^{iz} + 1 \right) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(\frac{2z^2 - z^2 - b^2}{z^2 + b^2} e^{iz} + 1 \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{2z}{z^2 + b^2} e^{iz} + \frac{1 - e^{iz}}{z} \right) \\ &= -i , \end{aligned}$$

la funzione $z \mapsto \frac{1}{z} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} e^{iz} + 1 \right)$ ha singolarità eliminabile in 0 e quindi è limitata in un intorno di 0. Risulta che

$$\lim_{\substack{0 < \varepsilon \rightarrow 0 \\ \partial^+ U_\varepsilon^+(0)}} \int \frac{1}{z} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} e^{iz} + 1 \right) dz = 0$$

e concludiamo :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{e^{ix}}{x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ 0 < \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^r f(x) dx \right) \\ &= 2\pi i e^{-b} - \pi i \\ &= \pi (2e^{-b} - 1) i . \end{aligned}$$

Rimarco: Poiché $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ e

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\cos x}{x} dx &= 0 , \\ \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin x}{x} dx &= 2 \int_{\varepsilon}^r \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin x}{x} dx , \end{aligned}$$

abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ 0 < \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^r \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \left(e^{-b} - \frac{1}{2} \right) .$$