Immersioni e Embeddings

Definition 0.1 *Siano date due varieta' C^∞, M ed N ed una mappa C^∞, $f : M \to N$, diciamo che f e' una immersione se l'applicazione lineare differenziale $df_p : T_p(M) \to T_p(N)$ e' iniettiva per ogni $p \in M$.*

Notiamo che se $f : M \to N$ e' una immersione, la dimensione di M e' minore o uguale a quella di N. Inoltre lo spazio tangente ad M in un punto $p \in M$, e' naturalmente identificato con $df_p(T_p(M))$ che e' un sottospazio vettoriale di $T_{f(p)}(N)$.

Definition 0.2 *Nelle stesse ipotesi della definizione precedente diciamo che f e' un embedding se f e' una immersione iniettiva tale che la mappa $f : M \to f(M)$ e' continua biunivoca con inversa continua, se su $f(M)$ di considera la topologia indotta dalla topologia di N.*

Per definizione ogni embedding e' una immersione iniettiva, ma il viceversa in generale non e' vero.

Example 0.3 *Sia $g : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ la mappa data da $g(t) = (sen(t), sen(2t))$. La mappa g e' continua, in particolare l'insieme $\Gamma = g([0, 2\pi])$ con la topologia indotta da $\mathbf{R}^2$ e' compatto. Notiamo che $g(0) = g(\pi) = g(2\pi) = (0, 0)$. Sia f la restrizione di g all'intervallo aperto $(0, 2\pi)$. Si ha quindi $f((0, 2\pi)) = \Gamma$, ed f e' C^∞. Vediamo che f e' iniettiva. Se per $0 < t < 2\pi$ abbiamo $sen(t) = 0$, avremo anche $cos(t) = -1$, quindi $t = \pi$, percio' $f^{-1}(0, 0) = \pi$. D'altra parte se $f(t) = (x, y)$ con $x \neq 0$, allora $sen(t) = x$, e $cos(t) = \frac{y}{2x}$, da cui si ottiene che $f^{-1}(f(t)) = t$. D'altra parte $f'(t) = (cos(t), 2cos(2t)) = (cos(t), 2(cos^2(t) - sen^2(t)))$. Ma se $cos(t) = 0$, allora $sen^2(t) = 1$. Quindi $f'(t) \neq 0$ per $0 < t < 2\pi$. In altre parole f e' una immersione iniettiva. D'altra parte Γ e' compatto, mentre l'intervallo aperto $(0, 2\pi)$ non lo e', quindi f non e' un embedding.*

D'altra parte esistono immersioni non iniettive, come ad esempio la mappa $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, data da $f(t) = (cos(t), sen(t))$, infatti $f'(t) = (-sen(t), cos(t))$ non si annulla mai, percio' f e' una immersione, ma ad esempio $f(0) = f(2\pi)$.

Example 0.4 *Sia $G : \Omega \to \mathbf{R}^k$ una mappa C^∞, dove Ω e' un aperto di $\mathbf{R}^m$, e sia $f : \Omega \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^k = \mathbf{R}^{m+k}$ la mappa $X \to (X, G(X))$, chiaramente f e' un embedding di Ω in $\mathbf{R}^{m+k}$ la cui immagine e' il grafico di G. Pi in generale si puo' considerare la composizione $\sigma \circ f$ di f con un diffeomorfismo di $\mathbf{R}^{m+k}$ in se' che permuta le coordinate, e si ottiene ancora un embedding di Ω in $\mathbf{R}^{m+k}$.*

Criteri semplici per stabilire se una immersione iniettiva e' un embedding sono i seguenti:

Proposition 0.5 *Sia f da M ad N una immersione iniettiva, se M e' compatta, f e' un embedding.*

Proof. Dato che f e' continua, $f(M) \subseteq N$ e' compatto, se C e' un chiuso in M, allora C e' compatto, quindi $f(C) \subseteq f(M)$ e' compatto, e dato che $f(M)$ e' uno spazio di Hausdorff, $f(C)$ e' anche chiuso in $f(M)$, percio' f e' un embedding. ■

Proposition 0.6 *Sia f da M ad N una immersione iniettiva, se la dimensione di M e la dimensione di N coincidono, allora f e' un embedding con immagine aperta in N.*

Proof. Riportandosi ad aperti di $\mathbf{R}^n$ ed $\mathbf{R}^m$ attraverso carte locali, ci si riduce al teorema di inversione locale. ■

Data una immersione $f : M \to N$ chiameremo topologia intrinseca, la topologia su $f(M)$ che rende f continua con inversa continua, e topologia indotta, la topologia indotta dalla topologia di M.

Definition 0.7 *Siano $f_1 : M_1 \to N$ ed $f_2 : M_2 \to N$ due immersioni iniettive, diciamo che le due immersioni sono equivalenti se esiste un diffeomorfismo $G : M_2 \to M_1$ tale che $f_1 \circ G = f_2$. Questa e' chiaramente una relazione di equivalenza. In particolare se f_1 ed f_2 sono equivalenti si ha che $f_1(M_1) = f_2(M_2)$. Una classe di equivalenza per questa relazione di chiama sottovarieta' immersa in N. La classe di equivalenza di un embedded si chiamera' sottovarieta' embedded.*

Osserviamo che se $f : M \to N$ e' una immersione iniettiva, possiamo considerare su $f(M)$ l'unica struttura di varieta' differenziabile per la quale la mappa $f_1 : M \to f(M)$ e' un diffeomorfismo. Si ha quindi, assegnando ad $f(M)$ questa struttura, che la mappa di inclusione $i : f(M) \to N$ e' una immersione iniettiva equivalente ad f. D'altra parte se M_1 ed M_2 sono sottoinsiemi di N tali che su M_1 ed M_2 esistano strutture di varieta' differenziabili per le quali le inclusioni $i : M_1 \to N$ ed $i : M_2 \to N$ siano immersioni iniettive equivalenti, allora $M_1 = M_2$ e l'identita' $Id : M_1 \to M_2$ e' un diffeomorfismo, cioe' M_1 ed M_2 coincidono, non solo come insiemi ma anche come varieta' differenziabili. In altre parole una sottovarieta' immersa e' una struttura di variet' differenziabile su un sottoinsieme di M per il quale l'inclusione sia una immersione (iniettiva).

Proposition 0.8 *Siano M ed N varieta' differenziabili di dimensione m ed n rispettivamente. Sia $f : M \to N$ una immersione, allora per ogni $p \in M$ esistono un intorno aperto U di p, ed un intorno aperto V di $f(p)$, ed esistono diffeomorfismi $\varphi_1 : U \to (-1,1)^m$ e $\varphi_2 : V \to (-1,1)^n$ tali che $\varphi_1(p) = 0$, $\varphi_2(f(p)) = 0$, e*

$$\varphi_2 \circ f = P \circ \varphi_1.$$

Dove

$$P(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0).$$

Proof. Riportandosi ad aperti di $\mathbf{R}^n$ ed $\mathbf{R}^m$ attraverso carte locali, ci si riduce al teorema del rango. ∎

Corollary 0.9 *Se $f : M \to N$ e' una immersione, allora per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto U di p, tale che $f_{|U}$ e' un embedding.*

Proposition 0.10 *Sia $f : M \to N$ una immersion iniettiva, sia S una varieta' differentiabile, e sia $\alpha : S \to M$ una mappa. Assumiamo che α sia continua, e che $f \circ \alpha$ sia C^∞, allora α e' anch'essa C^∞. In particolare, se f e' un embedding, ed $f \circ \alpha$ e' C^∞, allora α e' C^∞.*

Proof. Sia $p \in S$ e sia U un intorno di $\alpha(p)$ in N come nell'enunciato della proposizione 0.8, dato che α e' continua esiste un intorno aperto V di p in S tale che $\alpha(V) \subseteq U$. Usando le notazioni della proposizione 0.8 abbiamo che $\varphi_2 \circ f \circ \alpha$ e' C^∞ in V, ma $\varphi_2 \circ f \circ \alpha = P \circ \varphi_1 \circ \alpha = (\varphi_1 \circ \alpha, 0, \ldots, 0)$. Ne segue che $\varphi_1 \circ \alpha$ e' C^∞ su V. Dato che φ_1 e' un diffeomoerfismo, e V e' un intorno di un punto arbitrario, segue l'asserto. ∎

Corollary 0.11 *Siano $f_1 : M_1 \to N$ ed $f_2 : M_2 \to N$, due embeddings tali che $f_1(M_1) = f_2(M_2)$ allora f_1 ed f_2 sono equivalenti.*

Proof.

E' sufficiente porre $\alpha = f_1 \circ {f_2}^{-1}$, che e' una mappa biunivoca con inversa $\alpha^{-1} = f_2 \circ {f_1}^{-1}$ ed usare la proposizione 0.10 ∎

Non e' detto in generale che due immersioni iniettive con la stessa immagine siano equivalenti.

Example 0.12 *Riprendiamo l'esempio 0.3 e poniamo $f_1 = f,\ f_2 = f \circ \lambda$ con*

$$\lambda(t) = \pi - t \ \ \textit{per}\ 0 < t < \pi,\ \lambda(\pi) = \pi, \ \ \textit{e} \ \ \lambda(t) = 3\pi - t \ \textit{per}\ \pi < t < 2\pi.$$

L'applicazione λ e biunivoca da (0.2π) in se' quindi $f_1((0, 2\pi) = f_2(0, 2\pi))$, inoltre $f_2(t) = (sen(t), -sen(2t))$ ed e' quindi una immersione iniettiva. Tuttavia λ e' discontinua in π percio' f_1 ed f_2 non sono equivalenti.

Theorem 0.13 *Sia S un sottoinsieme di una varieta' differenziabile N di dimensione n, allora S e' (l'immagine di) una sottovarieta' embedded in N di dimensione k se e solo se vale la condizione seguente:*

Per ogni punto $p \in S$ esiste un intorno aperto U di p in N, esiste un aperto Ω in $\mathbf{R}^k$, con $0 \in \Omega$, ed esiste un embedding $\varphi : \Omega \to M$ tale che $\varphi(\Omega) = U \cap S$, e $\varphi(0) = p$. La mappa φ^{-1} risulta allora una carta locale C^∞ per la struttura di varieta' differenziabile di S. Inoltre per tale struttura l'inclusione di S in N e' un embedding. In particolare si ha che se φ e' come sopra, e se $X \in \Omega$, allora $T_{\varphi(X)}(S) = d\varphi_X(T_X(\Omega)) = d\varphi_X(\mathbf{R}^k)$.

Proof.

Sia $f : M \to N$ un embedding tale che $f(M) = S$, dove M e' una varieta' differenziabile di dimesione k. Sia $q \in M$ tale che $f(q) = p \in S$. Sia $\Psi : V \to \Omega$ una carta locale di M in un intorno V del punto q con $\Psi(q) = 0$. Poniamo $\varphi = f \circ \Psi^{-1} : \Omega \to f(V) = U \cap S$, dove Ω e' un aperto di $\mathbf{R}^k$ e U e' un intorno aperto di p in N. La mappa φ soddisfa le condizioni richieste.

Viceversa, supponiamo sia data una famiglia $\varphi_i : \Omega_i \to N$ di embeddings locali come sopra, tali che $\{V_i = \varphi_i(\Omega_i)\}_{i\in I}$ e' un ricoprimento aperto di S con la topologia indotta da N. Dato che tale topologia e' di Hausdorff a base numerabile di aperti, per dare ad S la struttura di varieta' sara' sufficiente provare che per ogni scelta di indici i e j, i cambiamenti di carte ${\varphi_i}^{-1} \circ \varphi_j$ sono C^∞ nel loro insieme di definizione. Possiamo per la proposizione 0.8 supporre che $\Omega_i = \Omega_j = (-1, 1)^k$, e che esistano diffeomorfismi $\Theta_i : U_i \to (-1, 1)^n$ e $\Theta_j : U_j \to (-1, 1)^n$ tali che $U_i \cap S = V_i,\ U_j \cap S = V_j$, e tali che

(1)

i) $\Theta_i(U_i \cap S) = (-1, 1)^k \times \{0\}$
$\Theta_j(U_j \cap S) = (-1, 1)^k \times \{0\}$.
In particolare, essendo Θ_i e Θ_j dei diffeomorfismo abbiamo
ii) $\Theta_i(U_i \cap U_j \cap S) = \Delta_{i,j} \times \{0\}$
$\Theta_j(U_i \cap U_j \cap S) = \Delta_{j,i} \times \{0\}$.
Dove $\Delta_{i,j}$ e $\Delta_{j,i}$ sono aperti di $\mathbf{R}^k$.
iii) $\Theta_i \circ \varphi_i(X) = (X, 0)$
$\Theta_j \circ \varphi_j(Y) = (Y, 0)$.

Da i) e ii) ricaviamo

$$\begin{aligned} {\varphi_i}^{-1}(U_i \cap U_j \cap S) &= \Delta_{i,j} \\ {\varphi_j}^{-1}(U_i \cap U_j \cap S) &= \Delta_{j,i} \end{aligned} \tag{2}$$

Poniamo $G_{i,j} = \Theta_j \circ {\Theta_i}^{-1}$. la mappa $G_{i,j} : W_{i,j} \to W_{j,i}$ e' un diffeomorfismo, dove $W_{i,j} = \Theta_i(U_i \cap U_j),\ W_{j,i} = \Theta_j(U_i \cap U_j)$.

Per $X \in \Delta_{i,j}$ abbiamo

$$G_{i,j}(X, 0) = (H_{i,j}(X), 0),\ \text{dove}\ H_{i,j} : \Delta_{i,j} \to \Delta_{j,i}\ \text{e' una mappa}\ C^\infty.$$

D'altra parte se $X \in \Delta_{i,j}$ dall'equazione (1) si ricava

$$G_{i,j}(X, 0) = \Theta_j({\Theta_i}^{-1}(X, 0)) = \Theta_j(\varphi_i(X)) = \Theta_j(\varphi_j(\varphi_j^{-1}(\varphi_i(X)) = (\varphi_j^{-1}(\varphi_i(X), 0).$$

Percio' $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i = H_{i,j}$ e' una mappa C^∞, scambiando gli indici i e j si ottiene che $H_{i,j}$ e' un diffeomorfismo. Dotiamo allora S della struttura differenziabile definita dalle carte $\{{\varphi_h}^{-1}\}_{h\in I}$. Per tale struttura l'inclusione $i : S \to M$ risulta essere un embedding, infatti la topologia di S e' quella indotta da M, inoltre per ogni intorno U_h della famiglia vista sopra, si ha che la mappa $\varphi_h : (-1, 1)^k \to V_h = U_h \cap S$ e' un diffeomorfismo, e la mappa $i \circ \varphi_h : (-1, 1)^k \to M$ e' un embedding. Percio' l'inclusione $i : S \to M$ e' anch' esso un embedding. In fine, chiaramente essendo φ_h un diffeomorfismo, se $X \in (-1, 1)^k$ si ha $d{\varphi_h}_X(T_X((-1, 1)^k)) = T_{\varphi_h(X)}(S) = d\varphi_X(\mathbf{R}^k)$.
■

La descrizione vista nel teorema precedente e' una "forma parametrica" locale della sottovarieta' embedded S, vogliamo ora descrivere una "forma cartesiana" locale.

Theorem 0.14 *Sia S un sottoinsieme di una varieta' differenziabile N di dimensione n, allora S e' (l'immagine di) una sottovarieta' embedded in N di dimensione k se e solo se vale la condizione seguente:*

Per ogni punto $p \in S$ esiste un intorno aperto U di p in N, ed esiste mappa $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$ che sia C^∞ e che soddisfi entrambe le condizioni seguenti:

$U \cap S = \{p \in U : F(p) = 0\}$,
Il rango del differenziale dF_p di F nel punto p e' uguale ad $n - k$.

In tal caso si ha che lo spazio tangente $T_p(S)$ di S nel punto p coincide con il nucleo $Ker(dF_p)$ del differenziale di F nel punto p.

Proof. Supponiamo che S sia embedded, e consideriamo un embedding $f : M \to N$. Sia $S = F(N)$ e $p = f(q) \in S$. Sia V un intorno aperto di q in M, tale che $f(V) = U \cap S$, con U intorno di p in N, scelti in modo che, esistono diffeomorfismi $\varphi_1 : V \to (-1, 1)^k$ e $\varphi_2 : U \to (-1, 1)^n$ con $\varphi_2 \circ f = P \circ \varphi_1, \varphi_1(q) = \varphi_2(p) = 0$ come nella proposizione 0.8. Quindi $\varphi_2(U \cap S) = \varphi_2(f(V)) = P(\varphi_1(V)) = P((-1, 1)^k)$.

Sia $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-k}$ la proiezione sulle ultime $n - k$ coordinate. La mappa $F = \pi \circ \varphi_2$ soddisfa le condizioni richieste.

Viceversa supponiamo che una tale F esista, per la continuita' del differenziale possiamo supporre che dF_q abbia rango $n-k$ per ogni $q \in U$. Componendo con carte locali possiamo ridurci al caso di aperti di $\mathbf{R}^n$ ed $\mathbf{R}^{n-k}$ rispettivamente. Il teorema della funzione implicita ci dice allora che il luogo di zeri di F e' localmente un grafico. L' esempio 0.4 mostra che il grafico e' un embedding locale, e il teorema 0.13 ci permette di provare che S e' una varieta' embedded. Sia allora $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una curva C^1 tale che $\gamma(0) = p$, e $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq U \cap S$. Si ha allora che $F \circ \gamma \equiv 0$, percio' $dF_p(\gamma'(0)) = 0$, cioe' $T_p(S) \subseteq Ker dF_p$. Dato che questi due sottospazi vettoriali di $T_p(N)$ hanno la stessa dimensione, essi devono coincidere. ■

Remark 0.15 *Sia S una sottovarieta' embedded in N, segue dal teorema 0.14 che S e' localmente chiusa in N, cioe' per ogni punto $p \in S$ esiste un intorno aperto U di p in N tale che $U \cap S$ e' chiuso in U. Infatti $U \cap S$ e' luogo di zeri di una mappa continua in U.*

Remark 0.16 *Il teorema precedente puo' essere riformulato nel modo seguente: Un sottoinsieme S di una varieta' differenziabile N di dimensione n e' una sottovarieta' di dimensione k se e solo se per ogni punto p di S esiste un sistema di coordinate locali per N centrate in p (cioe' tali che il punto p corrisponde a 0), tali che in queste coordinate S sia dato dalle equazioni $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-k} = 0$.*

Example 0.17 *Sia $S^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ la sfera dafinita da $S^n = \{X \in \mathbf{R}^{n+1} : ||X||^2 = 1\}$. Essa e' una varieta' con un'unica rappresentazione cartesiana data da $F(X) = ||X||^2 - 1$, e con due rappresentazioni parametriche locali, date dalla mappa inversa della proiezione stereografica dal polo nord e dal polo sud rispettivamente.*

Corollary 0.18 *Sia $F : M \to N$ una mappa C^∞, tra varieta' differenziabili di dimensione m ed n rispettivamente, e sia S una sottovarieta' embedded di dimensione k in N. Sia $L = F^{-1}(S)$. Supponiamo che il differenziabile dF_q abbia rango n per ogni $q \in T$, allora L e' una sottovarieta' embedded in M di dimensione $n - m + k$ e per $q \in L$, si ha $T_q(L) = dF_q{}^{-1}(T_{F(q)}(S))$.*

Proof. Sia $p \in L$, e sia U un intorno aperto di $F(p)$ in N tale che $U \cap S = \{q \in U : G(q) = 0\}$ con $G : U \to \mathbf{R}^{n-k}$ C^∞ e rango di $dG_{F(p)} = n-k$. Abbiamo che $F^{-1}(U) \cap L = \{q \in F^{-1}(U) : G \circ F(q) = 0\}$. Inoltre

$$dim(Imm\ d(G \circ F)_p) = dim(dG_{F(p)}(Imm\ dF_p)) = dim(dG_{F(p)}(T_{F(p)}(N)) = n-k.$$

Segue dal teorema 0.14 che L e' una sottovarieta' embedded e che

$$T_p(L) = Ker\ d(G \circ F)_p = Ker(dG_{F(p)} \circ d\ F_p) = (dF_p)^{-1}(Ker\ dG_{F(p)}) = (dF_p)^{-1}(T_{F(p)}(S)).$$

Quindi $dim(L) = dim\ Ker\ d\ F_p + dim T_{F(p)}(S) = m - n + k$. Dato che dF_p ha rango n. ■

Remark 0.19 *E' possibile indebolire leggermente le ipotesi del corollario 0.18 ottenendo lo stesso risultato sotto l'ipotesi che $Imm(d\ F_p) + T_{F(p)}(S) = T_{F(p)}(N)$.*

Questo segue dal fatto che sotto queste ipotesi $d\ G_{F(p)}(T_{F(p)}(N)) = d\ G_{F(p)}(Imm(d\ F_p) + T_{F(p)}(S)) = d\ G_{F(p)}(Imm(d\ F_p) + Ker\ d\ G_{F(p)}) = d\ G_{F(p)}(Imm(d\ F_p))$. Quindi dato che $dim\ Imm\ d\ G_{F(p)} = n-k$, anche $dim\ Imm(d\ G_{F(p)} \circ dF_p) = dim\ Imm\ d\ (G \circ F)_p = n-k$.

Data una sottovarieta' S embedded in N con N di dimensione n definiamo "codimensione di S in N" il numero $n - dim(S)$. La proposizione 0.18 si puo' formulare dicendo che sotto quelle ipotesi l'insieme $F^{-1}(S)$ e' una sottovarieta' embedded con $codim(F^{-1}(S)) = codim(S)$.

Date due sottovarieta' S_1 ed S_2 embedded nella variet' N, sia $p \in S_1 \cap S_2$, diciamo che S_1 ed S_2 sono trasversali in p se $T_p(S_1) + T_p(S_2) = T_p(N)$.

Proposition 0.20 *Siano date due sottovarieta' S_1 ed S_2 embedded nella varieta' N, di dimensione k_1 e k_2 rispettivamente, tali che per ogni $p \in S_1 \cap S_2$, esse siano trasversali in p. Allora l'insieme $S_1 \cap S_2$ e' una sottovarieta' embedded in N tale che $T_p(S_1 \cap S_2) = T_p(S_1) \cap T_p(S_2)$, e $codim(S_1 \cap S_2) = codim(S_1) + codim(S_2)$.*

Proof. Sia $p \in S_1 \cap S_2$, e siano $G_1 : U \to \mathbf{R}^{n-k_1}$, e $G_2 : U \to \mathbf{R}^{n-k_2}$ mappe C^∞ di rango massimo in p, definite in un intorno aperto U di p, i cui luoghi di zeri siano rispettivamente $U \cap S_1$ ed $U \cap S_2$. Consideriamo la mappa $F : U \to \mathbf{R}^{2n-k_1-k_2}$, definita da $F(X) = (G_1(X), G_2(X))$. F e' allora una mappa C^∞ il cui luogo di zeri e' $U \cap S_1 \cap S_2$, inoltre $Ker\ d\ F_p = T_p(S_1) \cap T_p(S_2)$. Dalla formula di Grassmann e dall'ipotesi di trasversalita' segue che $dim\ Ker\ d\ F_p = k_1 + k_2 - n$, quindi $dim\ Imm\ d\ F_p = 2n - k_1 + k_2$. ■

Vogliamo ora dare un'altro esempio interessante di varieta' immerse non embedded.

Lemma 0.21 *I sottogruppi chiusi di* $\mathbf{R}$ *son* $\{0\}$, $\mathbf{R}$, *e* $\mathbf{Z}\alpha$ *con α numero reale positivo.*

Proof. I sottogruppi $\{0\}$, $\mathbf{R}$, e $\mathbf{Z}\alpha$ sono chiusi. Viceversa, sia G un sottogruppo chiuso con $G \neq \{0\}$, esiste allora $x > 0, x \in G$. Sia $S = \{x \in G : x > 0\}$ e sia α l'estremo inferiore di S. Supponiamo $\alpha > 0$, allora $\alpha \in G$ percio' $\mathbf{Z}\alpha \subseteq G$. Sia $x \in G$ $x > 0$, dividendo x per α troviamo $x = n\alpha + r$ con $n \in \mathbf{Z}$ e $0 \leq r < \alpha$. Essendo G un gruppo deve essere $r \in G$, quindi dalla definizione di α sara' $r = 0$. Ne segue che $G = \mathbf{Z}\alpha$. Supponiamo allora $\alpha = 0$ e per assurdo $G \neq \mathbf{R}$. Sia $U = \mathbf{R} \setminus G$. Sia (a, b) una componente connessa di U. Sia $x_0 \in G$ $x_0 > 0$, dato che $\mathbf{Z}x_0 \subseteq G$, avremo che (a, b) e' un intervallo limitato. Inoltre a e b appartengono a G. Dato che $\alpha = 0$, esiste un punto $x_0 \in G$ tale che $0 < x_0 < b - a$. Quindi $a < x_0 + a < b$ ed anche $x_0 + a \in G$. Abbiamo allora ottenuti una contraddizione. ∎

Lemma 0.22 *Sia α un numero reale non razionale, il sottogruppo $G = \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$ di $\mathbf{R}$ e' denso in $\mathbf{R}$.*

Proof.

La chiusura $\overline{G}$ di G e' un sottogruppo chiuso di $\mathbf{R}$, e' non zero dato che $1 \in \overline{G}$. Se fosse $\overline{G} = \mathbf{Z}\gamma$, Avremmo $1 = n_1\gamma$, $\alpha = n_2\gamma$ con n_1, n_2 numeri interi non nulli. Avremmo quindi $\alpha = \frac{n_2}{n_1}$, contro l'ipotesi. Quindi per il lemma 0.21 $\overline{G} = \mathbf{R}$.
∎

Consideriamo l'azione di $\mathbf{Z}^2$ per traslazioni su $\mathbf{R}^2$, questa e' una azione propriamente discontinua e libera, infatti e' ovviamente libera, e l'intersezione di una palla aperta di raggio 1/4 con ogni suo $\mathbf{Z}^2$ traslato e' vuota. Facendo il quoziente si ottiene il rivestimento $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Inoltre $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 = \pi([-1, 1] \times [-1, 1])$ e' compatto. Sia T il toro $S^1 \times S^1$ e consideriamo la mappa $P : \mathbf{R}^2 \to T$ data da $P(x, y) = (exp(2\pi ix), exp(2\pi iy))$. La mappa P e' un diffeomorfismo locale, inoltre, dato che $P(x, y) = P(x', y')$ se e solo se $(x, y) - (x', y') \in \mathbf{Z}^2$ la mappa P induce un omeomorfismo locale biunivoco, cio' un omeomorfismo $\tilde{P}$ da $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ in T. Assegnamo ad $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ la struttura di varieta' differenziabile che rende $\tilde{P}$ un diffeomorfismo, per questa struttura la mappa π e' un diffeomorfismo locale.

Sia α un numero reale non razionale, sia $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ la mappa $f(t) = (x_0 + t, y_0 + \alpha t)$. ed $F = \pi \circ f$.

Proposition 0.23 *La mappa $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ e' una immersione iniettiva, sia Γ l'immagine di F. Allora Γ e' denso in $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ e non contiene aperti di $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. In particolare Γ non e' embedded.*

Proof.

La mappa f e' C^∞ ed $f' = (1, \alpha)$ quindi f e' una immersione, dato che π e' un diffeomorfismo locale anche F e' una immersione C^∞. Vediamo che F e' iniettiva. Se $F(t_1) = F(t_2)$, allora $(t_2 - t_1, \alpha(t_2 - t_1)) = (m, n) \in \mathbf{Z}^2$. Se fosse $m \neq 0$ avremmo $\alpha = \frac{n}{m}$ contro l'ipotesi, quindi $t_2 = t_1$. Dobbiamo provare che $\pi^{-1}(\Gamma)$ e' denso in $\mathbf{R}^2$ e non contiene aperti di $\mathbf{R}^2$. L'insieme $\mathbf{Z}^2$ e' discreto e $\mathbf{Q}^2$ e' denso in $\mathbf{R}^2$. to U un aperto di $\mathbf{R}^2$, l'aperto $U + (-x_0, -y_0)$ contiene un punto $(q_1, q_2) \in \mathbf{Q}^2 \setminus \mathbf{Z}^2$. Ma se $(q_1, q_2) \in \mathbf{Q}^2 \setminus \mathbf{Z}^2$ appartenesse a $\pi^{-1}(\Gamma)$ esisterebbe un punto $({q'}_1, {q'}_2) \in \mathbf{Q}^2 \setminus \mathbf{Z}^2$ della forma $(t, \alpha t)$. Si avrebbe quindi $t \neq 0$ ed $\alpha \in \mathbf{Q}$ contro l'ipotesi. Dato ora $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, dato $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$, e dato $\varepsilon > 0$, poniamo, $t_0 = x - x_0 - m$. Abbiamo

$(x, y) - (x_0 + t_0 + m, y_0 + \alpha t_0 + n) = (0, y - y_0 - \alpha x + \alpha x_0 + (\alpha m - n))$. Dalla densita' di $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$ in $\mathbf{R}$ sappiamo che possiamo scegliere $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ in modo che $|y - y_0 - \alpha x + \alpha x_0 + (\alpha m - n)| < \varepsilon$. Percio' Γ e' denso in $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Se la sottovarieta' Γ fosse embedded, sarebbe, per l'osservazione 0.15 localmente chiusa, ed essendo densa sarebbe un aperto, contrariamente a quanto dimostrato sopra. ■

Remark 0.24 *Il campo vettoriale costante* $(1, \alpha)$ *di* $\mathbf{R}^2$ *e' invariante per traslazioni, induce quindi un campo vettoriale* C^∞ *mai nullo sul toro* $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$*. Dato che il toro e' compatto, tale campo induce una azione di* $\mathbf{R}$ *sul toro. La sottovarieta' immersa* Γ *e' l'orbita del punto* $\pi(x_0, y_0)$ *sotto questa azione di* $\mathbf{R}$.