2014

Trapani

Dispensa di Geometria,

1 Gauss Lagrange

Diciamo che la matrice simmetrica reale A e' congruente alla matrice B mediante la matrice invertibile N se $N^tAN = B$. Diciamo che A e' diagonalizzabile per congruenza mediante N se B si puo' scegliere diagonale. Vogliamo ora descrivere un algoritmo, detto algoritmo di Gauss Lagrange che permette di diagonalizzare per congruenza mediante una matrice invertibile N una qualunque matrice A simmetrica reale determinando simultaneamente una tale N.

Sia A una matrice reale simmetrica, $n \times n$, consideriamo la matrice (A, I), dove I e la matrice identita' $n \times n$. Se la matrice A e' 0 e' diagonalizzata per congruenza mediante la matrice I. Se non e' nulla supponiamo che la k esima colonna sia la prima colonna non nulla di A. Eliminando le prime $k-1$ righe e le prime $k-1$ colonne di (A, I) si ottiene la matrice (A', I) dove A' e' una matrice simmetrica reale $(n-k+1) \times (n-k+1)$ ed I e' l'identita' $(n-k+1 \times n-k+1)$.

PASSO 1

Se il coefficiente $a'_{1,1} = a_{k,k}$ non e' nullo si si agisce come nell algoritmo di Gauss sia sulle righe che sulle colonne ottenendo cosi' una matrice simmetrica con la prima riga e la prima colonna che hanno tutti zeri dopo il primo elemento. Cioe' da prima si lascia la prima riga invariata, si sceglie λ_1 in modo che $a'_{2,1} - \lambda_1 a'1, 1 = 0$ e si sostituisce la seconda riga con $(A'_2, I_2) - \lambda_1(A'_1, I_1)$, poi si sceglie λ_2 in modo che $a'_{2,2} - \lambda_2 a'1, 1 = 0$ e si sostituisce la terza riga con $(A'_3, I_3) - \lambda_2(A'_1, I_1)$ e cosi' via.

PASSO 2

Sulla matrice (A'', I'') cosi' ottenuta si opera analogamente sulle colonne, cioe' si lascia la prima colonna invariata, si sostituisce la seconda colonna con $(A''^2, I''^2) - \lambda_1(A''_1, I''_1)$, poi si sostituisce la terza colonna con $(A''_3, I_3) - \lambda_2(A''_1, I''_1)$ e cosi' via. Notiamo che quando operiamo sulle prime n righe di una data matrice $2n \times n$ modifichiamo anche il blocco delle ultime n colonne mentre quando operiamo sulle prime n colonne tale blocco resta invariato.

PASSO 3

Se abbiamo $a'_{1,1} = 0$ dato che la prima colonna di A' e' non nulla avremo $a'_{j,1} \neq 0$ per qualche $j > 1$. Sostituiamo allora alla prima riga di (A', I) la riga $(A'_1, I_1) + (A'_j, I_j)$ e lasciamo invariate tutte le altre righe. Nella matrice (B, I'') cosi' ottenuta sostituiamo alla prima colonna la colonna $(B_1, I''_1) + (B_j, I''_j)$. e lasciamo invariate tutte le altre colonne. Se nella matrice (C, I''') cosi' ottenuta abbiamo $c_{1,1} \neq 0$ possiamo applicare i passi 1 e 2. Se $c_{1,1} = 0$ ripetiamo il passo 3) e otteniamo una matrice (E, J). Osservando l'azione dei passi 1) 2) 3) sulla sottomatrice $\begin{pmatrix} a'_{1,1}, a'_{j,1} \\ a'_{1,j}, a'_{j,j} \end{pmatrix}$ e ricordando che $a'_{j,1} = a'_{1,j} \neq 0$ si vede che se $c_{1,1} = 0$ deve essere $e_{1,1} \neq 0$ e a questo punto possiamo riapplicare i passi 1) e 2). Alla fine di questo processo avremo ottenuto una matrice la cui prima colonna e la cui prima riga hanno il primo elemento non zero e tutti gli altri elementi zero. Possiamo allora togliere da questa matrice la sua prima riga e la sua prima colonna e sulla restante matrice applicare i passi precedenti. Alla fine del processo si otterra' una matrice (D, N^t) con D diagonale. Vogliamo ora verificare che N e' invertibilile e vale la relazione $N^tAN = D$. Data infatti una matrice A $n \times n$, un numero reale λ e due indici $1 \leq i < j \leq n$, la matrice ottenuta sostituendo la colonna A_i con la colonna $A_i + \lambda A_j$ e lasciando tutte le altre colonne inalterate e' il prodotto $AL(i, j\lambda)$ della matrice A per la matrice $L(i, j, \lambda)$. Dove dati i vettori $\{e_i\}$ della base cononica di $\mathbf{R}^n$, indichiamo con $L(i, j, \lambda)$ la matrice che ha come colonna i esima il vettore $e_i + \lambda e_j$ e per k diverso da i ha come colonna k esima il vettore e_k.. Si verifica subito che la matrice $L(i, j, \lambda)$ e' invertibile. Similmente fare una operazione analoga alla precedente sulle righe di A corrisponde a fare il prodotto $L(i, j, \lambda)^t A$. Dato che nell'algoritmo precedentemente descritto le operazioni sulle prime n righe di (A, I) modificano anche il blocco delle ultime n colonne, mentre agendo sulle prime n colonne tale blocco non viene modificato, risulta che alla fine dell'algoritmo a partire dalla matrice (A, I) avremo ottenuto una matrice della forma (N^tAN, N^t) con N invertibile, infatti N e' un prodotto di matrici del tipo $L(i, j, \lambda)$ per diverse scelte di i j e λ. Avendo a disposizione l'algoritmo di Gauss Lagrange possiamo mettere una iperquadrica in forma canonica affine. Infatti data l'iperquadrica $X^tAX + X^tb + c = 0$ scegliamo una matrice N invertibile tale che $N^tAN = D$ sia una matrice diagonale. Poniamo $X = NY$, sostituendo troviamo l'equazione $Y^tDY + Y^tb' + c' = 0$ ed a questo punto seguendo lo schema esposto nella dimostrazione del teorema **??** possiamo mettere quest'ultima equazione da prima in forma canonica metrica e successivamente in forma canonica affine (questo processo non coinvolge il calcolo di autovalori perch' la matrice D e' gi' diagonale).

1.1 Caso $n = 2$ ed $n = 3$

Vediamo piu' in particolare cosa succede nel caso $n = 2$ oppure $n = 3$.

Elenco delle coniche in forma canonica metrica

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > \ \ b > 0)$ ellisse reale (non degenere) $r = 2, R = 3, |s| = 2, |S| = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0 \ \ b > 0)$ iperbole (non degenere) $r = 2, R = 3, |s| = 0, |S| = 1$

$y = ax^2$ $(a > 0)$ parabola (non degenere) $r = 1, R = 3, |s| = 1, |S| = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ $(a > \ \ b > 0)$
ellisse immaginaria, non ha punti in $\mathbf{R}^2$ (non degenere) $r = 2, R = 3, |s| = 2, |S| = 3$

$x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 0$ $a > 0$ coppia di rette reali incidenti
(degenere) $r = 2, R = 2, |s| = 0, |S| = 0$

$x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 0$ $(a > 0$ coppia di rette incidenti immaginarie (degenere)
$r = 2, R = 2, |s| = 2, |S| = 2$
ha in $\mathbf{R}^2$ il solo punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{x^2}{a^2} = 1$ $(a > 0)$ coppia di rette reali parallele e distinte (degenere) $r = 1, R = 2, |s| = 1, |S| = 0$

$\frac{x^2}{a^2} = -1$ $(a > 0)$ coppia di rette immaginarie parallele e distinte,
non ha punti in $\mathbf{R}^2$ (degenere) $r = 1, R = 2, |s| = 1, |S| = 2$

$x^2 = 0$ retta doppia $r = 1, R = 1, |s| = 1, |S| = 1$ (degenere)

Per quanto riguarda le quadriche in $\mathbf{R}^3$ I tipi possibili di quadriche degeneri sono: i coni ellittici (immaginari) $x^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0$ i coni iperbolici $x^2 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$, con $a > 0, \ b > 0$ e i cilindri su coniche. Notiamo che un cono contiene sempre l'origine, e che se contiene un vettore non nullo v, contiene anche tutta la retta passante per l'origine con vettore direttore v. I cilindri corrispondono alle equazioni nelle quali qualche variabile non compare, cio' vuol dire che le variabili che non compaiono possono assumere qualunque valore. Si ottiene quindi un cilindro sopra l'oggetto geometrico descritto dall'equazione (pensato in uno spazio di dimensione inferiore). Ad esempio si puo' avere un cilindro sopra una circonferenza, oppure sopra una ellisse, oppure una coppia di piani che si puo' anche pensare come un cilindro sopra una coppia di rette.

I tipi possibili di quadriche non degeneri sono:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0 \;\; b>0 \;\; c>0)$ ellissoide reale

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ $(a> \;\;\; b>0 \;\; c>0)$ ellissoide immaginario

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0 \;\; b>0 \; c>0)$ iperboloide iperbolico, (cestino della carta)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0 \;\; b>0 \;\; c>0)$ iperboloide ellittico detto anche iperboloide a due falde

$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0 \; b>0)$ paraboloide iperbolico (sella)

$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0 \;\; b>0)$ paraboloide ellittico

Osservazione 1.1 *Il motivo per cui le coniche si chiamano coniche, e' che quasi ogni conica e' metricamente equivalente all'intersezione del cono* $x^2+y^2-z^2=0$ *con un piano. Le uniche eccezioni sono rette parallele reali e distinte* $x^2-a^2=0$, *con* $a>0$, *rette parallele immaginarie* $x^2+a^2=0$, *con* $a>0$ *ed ellissoide immaginario* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$. *con* $a>0, b>0$. *Per ottenere rette parallele si potrebbero considerare le intersezioni del cilindro con base una circonferenza* $x^2+y^2-1=0$ *con i piani di equazione* $y=c$ *al variare dell parametro reale* c. *Cos' si ottengono tutte le rette parallele immaginarie e tutte quelle reali di distanza non superiore a* 2. *Per ottenere rette parallele reali di distanza almeno* 2 *si potrebbero considerare le intersezioni del cilindro con base l'iperbole* $x^2-y^2=1$ *co i piani* $y=cost$. *In fine per ottenere ellissoidi immaginari si potrebbe considerare l'intersezione di piani non passanti per l'origine con il cono immaginario* $x^2+y^2+z^2=0$.

2 Descrizione geometrica delle coniche non degeneri a punti reali

Siano F_1 ed F_2 due punti di $\mathbf{R}^2$, l'ellisse e' descritta come il luogo dei punti p in $\mathbf{R}^2$ tali che la somme delle distanze di P dai punti F_1 ed F_2 e' una costante positiva $2a$ diversa dalla distanza $2c$ tra F_1 ed F_2. I punti F_1 ed F_2 sono detti fuochi dell'ellisse. Notiamo che se i fuochi coincidono con un unico punto F si ottiene una circonferenza di centro F e raggio a. Similmente :

Dati due punti distinti F_1 ed F_2 in $\mathbf{R}^2$, l'iperbole e' descritta come il luogo dei punti P in $\mathbf{R}^2$ tali che il valore assoluto della differenza delle distanze di P dai punti F_1 ed F_2 e' una costante positiva $2a$ diversa dalla distanza $2c$ tra F_1 ed F_2. I punti F_1 ed F_2 sono detti fuochi dell'iperbole.

Ricordiamo ora che per ogni terna di punti P Q ed R in $\mathbf{R}^2$ vale la disuguaglianza triangolare $d(P,Q)+d(Q,R)\geq d(P,R)$. Da cio' segue che se P e' un punto dell' ellisse di fuochi F_1 ed F_2 vale la disuguaglianza

$$2a=d(F_1,P)+d(P,F_2)\geq d(F_1,F_2)=2c$$

ma per ipotesi a non coincide con c percio' nel caso dell'ellisse abbiamo che $a>c$.

Se P e' invece un punto dell'iperbole con fuochi F_1 ed F_2 si ha

$$d(F_1, P) \leq d(F_1, F_2) + d(F_2, P)$$

e

$$d(F_2, P) \leq d(F_2, F_1) + d(F_1, P)$$

percio'

$$2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2| \leq 2c$$

e poiche' a e c non coincidono nel caso del'iperbole abbiamo $a < c$.

Verifichiamo che si ottengono effettivamente l'ellisse e l'iperbole.

Nel caso dell'ellisse se scegliamo il sistema di coordinate ortogonali in modo che i fuochi stiano sull'asse x da parti opposte rispetto all'origine ed abbiano uguale distanza dall'origine, allora essi hanno coordinate $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ rispettivamente. La somma delle distanze del punto di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dai fuochi e'

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

e' la condizione descritta sopra diventa

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

facendo il quadrato e semplificando si trova

$$-\sqrt{((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2)} = x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2$$

il che implica che $x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 \leq 0$
e facendo ancora il quadrato si trova

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0$$

Cioe'

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{1}$$

o anche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

con $a^2 - c^2 > 0$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} \leq a$.

Notiamo che se l'equazione (2) e' soddisfatta l'espressione $x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = a^2(1 - \frac{y^2}{b^2}) + y^2 - a^2 - b^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2 + b^2y^2 - a^2b^2 - b^4}{b^2} = \frac{-(a^2-b^2)y^2 - b^4}{b^2}$, e' minore o uguale a 0 poiche' $0 \leq b \leq a$. Se in una ellisse $b \geq a$ ci si puo' sempre ricondurre al caso precedente applicando la trasformazione ortogonale $(x, y) \to (y, x)$.

Nel caso dell'iperbole in modo simile si trova

$$\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)} = x^2+y^2+c^2-2a^2$$

dal che si deduce che $x^2+y^2+c^2-2a^2 \geq 0$,
e facendo ancora il quadrato

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=0$$

Cioe'

(3) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

ovvero

(4) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

con $a^2-c^2<0$ e $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Notiamo che se l'equazione (4) e' soddisfatta l'espressione $x^2+y^2+c^2-2a^2 = x^2+y^2+b^2-a^2 = a^2(1+\frac{y^2}{b^2})+y^2-a^2+b^2 = \frac{a^2b^2+a^2y^2+b^2y^2-a^2b^2+b^4}{b^2} = \frac{-(a^2+b^2)y^2+b^4}{b^2}$, e' maggiore o uguale a 0.

Dato un punto F in $\mathbf{R}^2$ ed una retta δ tale che F non appartiene a δ, la parabola e' descritta come il luogo dei punti P di $\mathbf{R}^2$ tali che $d(P,F)=d(P,\delta)$.

Infatti se $d(F,\delta)=\frac{1}{2a}$ scegliamo il sistema di coordinate ortogonali in modo che la retta δ sia parallela all'asse x, in modo che F sia sul semiasse y positivo, che δ sia dalla parte opposta di F rispetto all asse x, ed in fine che la distanza di F dall'origine coincida con la distanza di δ dall'origine. Allora F ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$ mentre δ ha equazione $x=\frac{-1}{4a}$. Se P ha coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ allora l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2+(y-\frac{1}{4a})^2} = |y+\frac{1}{4a}|.$$

Quadrando e semplificando si ottiene

$$y=ax^2$$

Scegliamo ora un punto F di $\mathbf{R}^2$ ed una retta δ non contenente F ed un numero reale $e>0$.

Consideriamo il luogo C dei punti P in $\mathbf{R}^2$ tali che

$$d(P,F)=e\ d(P,\delta)$$

Allora C e' una parabola se $e=1$, e' una iperbole se $e>1$ ed e' una ellisse con fuochi distinti (cioe' e' una ellisse che non e' una circonferenza) se $e<1$. D'altra parte ogni iperbole, ogni parabola ed ogni ellisse diversa da una circonferenza si puo' ottenere in questo modo per una opportuna scelta di F di δ e di e.

Il caso $e=1$ e' trattato sopra.

Nel caso $e \neq 1$ sia d la distanza di F da δ sia $c = \frac{de^2}{|e^2-1|}$ e sia $a = \frac{de}{|e^2-1|}$. Abbiamo allora $a > 0, \ c > 0$ ed $e = \frac{c}{a}$. Scegliamo il sistema di coordinate in modo che l'asse x coincida con la retta passante per F e perpendicolare a δ. Orientiamo l' asse x nel verso che va da F verso δ se $e < 1$ e nel verso che va da δ verso F altrimenti. In fine scegliamo l'origine a distanza c da F in modo che il segmento dall'origine verso F sia orientato come l'asse x. Risulta allora che F ha coordinate $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ e δ ha equazione $x = \frac{a^2}{c}$.

L'equazione allora diventa

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\ |x - \frac{a^2}{c}|$$

facendone il quadrata e semplificando si trova

$$(1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 + c^2 = a^2$$

cioe'

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) + y^2 + c^2 - a^2 = 0$$

o anche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

che coincide con l' equazione (1) se $a > c$ cioe' se $e < 1$ e con l'equazione (3) se $a < c$ cioe' se $e < 1$. Essendo $c > 0$ la curva non puo' mai essere una circonferenza. Se abbiamo una ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2}$ con $c > 0$, e se facciamo tendere a verso un $r > 0$ e c verso 0 l'ellisse tende a diventare una circonferenza di raggio r. D'altra parte l'eccentricita' dell'ellisse tende a zero mentre la sue direttrice tende all'infinito, si potrebbe quindi dire che la circonferenza e' una conica con eccentricit' zero e direttrice all'infinito. Nel caso della parabola il suo asse di simmetria e' la retta passante per F ortogonale a δ, la concavita' della parabola e' nella direzione da δ verso F ed il vertice e' il punto medio tra δ ed F. Nel caso dell'ellisse il suo asse maggiore e' ancora la retta per F ortogonale a δ,

Nel caso dell'iperbole questa stessa retta e' l'asse di simmetria che interseca la curva.

3 coniche non degeneri a punti reali in coordinate polari

Fissato un sistema di coordinate polari nel piano con $\rho > 0, -\pi < \theta \leq \pi$. La circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$ ha equazione

$$\rho = r$$

Dato un numero $e > 0$ sia δ la retta di equazione cartesiana $x = h$ con $h > 0$. e sia F l'origine. Notiamo che F non appartiene a δ. Consideriamo la curva data dall'equazione $d(P, F) = ed(P, \delta)$. Essendo $e > 0$ un punto di questa curva non puo' coincidere con F e non puo' appartenere a δ. In coordinate polari questa equazione diventa

$$\rho = e\ |h - \rho\cos(\theta)|$$

Nei punto della curva $|h - \rho\cos(\theta)|$ non e mai zero, quindi se θ varia in un intervallo questa quantit' deve avere segno costante. Consideriamo separatamente due casi

caso 1) $h - \rho\cos(\theta) > 0$ e caso 2) $h - \rho\cos(\theta) < 0$.

Notiamo che se $e \leq 1$ per i punti della curva il caso 2) non si puo' presentare.

Infatti nel caso 2) l'equazione della curva diventa $\rho = e\ (\rho\cos(\theta) - h)$ cioe'

$$\rho(1 - e\cos(\theta)) = -eh$$

D'altra parte se $e \leq 1$ deve essere $e\cos(\theta) \leq 1$ e quindi $1 - e\cos(\theta) \geq 0$ inoltre $\rho > 0$ mentre $-eh < 0$ percio' l' equazione sopra e' impossibile.

Se ne deduce che se $e \leq 1$ l'equazione della curva e'

$\rho = e\ (h - \rho\cos(\theta)$ cioe'

$$\rho = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta)} \tag{5}$$

Se $e < 1$ poiche' la quantita' $1 + e\cos(\theta)$ e' sempre positiva l'equazione (5) e' definita per $-\pi < \theta \leq \pi$. Questa e' l'equazione in coordinate polari di una ellisse che non sia una circonferenza.

Se $e = 1$ la quantita' $1 + \cos(\theta)$ e' maggiore o uguale a zero e si annulla per $\theta = \pi$. l'equazione (5) e' definita per $-\pi < \theta < \pi$. Questa e' l 'equazione in coordinate polari di una parabola.

Se $e > 1$ si possono presentare entrambi i casi $h - \rho\cos(\theta) > 0$ ed $h - \rho\cos(\theta) < 0$.

Per $h - \rho\cos(\theta) > 0$ l'equazione e' sempre $\rho = \frac{eh}{1+e\cos(\theta)}$ ma la quantita' $1 + e\cos(\theta)$ si annula se $\cos(\theta) = \frac{-1}{e}$. Sia θ_0 l'angolo tra $\frac{\pi}{2}$ e π tale che $\cos(\theta_0) = \frac{-1}{e}$ e $\sin(\theta_0) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$. Dato che $\rho > 0$, l' equazione

$$\rho = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta)}$$

e' definita per $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ e descrive uno dei due rami dell'iperbole.

Per $h - \rho\cos(\theta) < 0$ l'equazione diventa $\rho = e(\rho\cos(\theta) - h)$ cioe'

$$\rho = \frac{eh}{e\cos(\theta) - 1}.$$

La quantita' $e\cos(\theta) - 1$ si annula se $\cos(\theta) = \frac{1}{e}$. Sia allora θ_1 l'angolo tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ tale che $\cos(\theta_1) = \frac{1}{e}$ e $\sin(\theta_1) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$. Dato che $\rho > 0$, l' equazione

$$\rho = \frac{eh}{e\cos(\theta) - 1}$$

e' definita per $-\theta_1 < \theta < \theta_1$ e descrive l' altro ramo dell'iperbole. Sia $P \in \mathbf{R}^2$ il punto di coordinate polari $\rho = \frac{he^2}{e^2-1}$ e $\theta = 0$. Notiamo che le semirette $\theta = \theta_0$ e $\theta = -\theta_1$ formano una retta r_1 passante per il fuoco, analogamente le semirette $\theta = \theta_1$ e $\theta = -\theta_0$ formano una retta r_2 passante per il fuoco. Le rette parallele ad r_1 ed r_2 passanti per il punto P sono allora gli asintoti dell'iperbole.