# Determinante

## 1 Definizione, esistenza e unicita', calcolo e principali proprieta'

Sia $\mathbf{M}(n, n, K)$ lo spazio delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti in un campo $K$, vogliamo provare il seguente Teorema:

**Theorem 1.1** *Esiste un'unica mappa $F$ dallo spazio delle matrici $n \times n$ a valori in $K$ che abbia le seguenti proprieta' :*

1)*$F$ e' multilineare sulle colonne*
2)*Se la matrice $A$ ha due colonne uguali allora $F(A) = 0$,*
3) *$F(I) = 1$ dove $I$ e' la matrice identica $n \times n$.*

Questa mappa $F$ la chiameremo determinante e la indicheremo con *det*.

Qualche volta il determinante viene anche indicato scrivendo la matrice con due linee verticali simili al valore assoluto, ad esempio $det \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 4, 5 \end{pmatrix}$ si puo' anche indicare con $\left| \begin{matrix} 1, 2 \\ 4, 5 \end{matrix} \right|$.

Dire che $F$ e' multilineare sulle colonne vuol dire che e' lineare su ogni colonna, dire che il determinante e' lineare sulla $i$ esima colonna vuol dire che se $X$ ed $Y$ sono vettori colonna di $n$ componenti e $\alpha$ e $\beta$ sono scalari in $K$, e se $A^1, \dots A^{i-1}, A^{i+1}, \dots A^n$ sono altri vettori colonna di $n$ componenti, allora vale la formula

$$F\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, \alpha X + \beta Y, A^{i+1}, \dots A^n\right)$$

$$= \alpha F\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, X, A^{i+1}, \dots A^n\right) + \beta F\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, Y, A^{i+1}, \dots A^n\right).$$

**Lemma 1.2** *Una mappa che soddisfi le propriet' 1) 2) e' alternante sulle colonne cioe' se in una matrice scambiamo due colonne la $F$ cambia segno.*

*Proof.*

Fissiamo due indici $i$ e $j$ con $1 \leq i < j \leq n$ ed una matrice $A$ $n \times n$. Consideriamo la matrice $A' = (A^1, \dots A^{i-1}, A^i + A^j, A^{i+1}, \dots . A^{j-1}, A^i + A^j, A^{j+1} \dots A^n)$. Dalla propriet' 2) sappiamo che $F(A') = 0$ quindi per la linearita' sulla $i$ esima e sulla $j$ esima colonna colonna abbiamo

$$0 = F(\Big(A^1, \dots A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \dots . A^{j-1}, A^i + A^j, A^{j+1} \dots A^n\Big)$$

$$+F\left(A^1, \dots A^{i-1}, A^j, A^{i+1}, \dots . A^{j-1}, A^i + A^j, A^{j+1} \dots A^n\right)$$

$$= F(\Big(A^1, \dots A^{i-1}, A^i, \dots . A^{j-1}, A^i, A^{j+1} \dots A^n\Big)$$

$$F(\Big(A^1, \dots A^{i-1}, A^i, \dots . A^{j-1}, A^j, A^{j+1} \dots A^n\Big)$$

$$F(\Big(A^1, \dots A^{i-1}, A^j, \dots . A^{j-1}, A^i, A^{j+1} \dots A^n\Big)$$

$$+F\left(A^1, \dots A^{i-1}, A^j, A^{i+1}, \dots . A^{j-1}, A^j, A^{j+1} \dots A^n\right).$$

Ancora della proprieta' 2) sappiamo che il primo e l'ultimo termine di questa somma sono nulli, si trova quindi

$$0 = F(\Big(A^1, \dots A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \dots . A^{j-1}, A^j, A^{j+1} \dots A^n\Big)$$

$$+F\left(A^1, \dots A^{i-1}, A^j, A^{i+1}, \dots . A^{j-1}, A^i, A^{j+1} \dots A^n\right)$$

cioe'

$$F(\Big(A^1, \dots A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \dots . A^{j-1}, A^j, A^{j+1} \dots A^n\Big)$$

$$= -F\left(A^1, \dots A^{i-1}, A^j, A^{i+1}, \dots . A^{j-1}, A^i, A^{j+1} \dots A^n\right).$$

■

**Lemma 1.3** *Se il campo $K$ ha caratteristica diversa da 2 ed una mappa $F$ e' alternante sulle colonne allora soddisfa la 2).*

*Proof.*

Se una matrice $A$ ha due colonne uguali, se scambiamo le due colonne la matrice non cambia quindi non cambia il valore di $F$ su quella matrice, d'altra parte per l'alternanza sulle colonne il valore di $F$ su quella matrice cambia segno, quindi se il campo ha caratteristica diversa da due il valore di $F$ su quella matrice e' zero. ■

**Lemma 1.4** *Se una mappa $F$ soddisfa la 1) e vale zero su ogni matrice che abbia due colonne uguali una accanto all'altra, allora $F$ soddisfa anche la 2).*

*Proof.*

Ripetendo la dimostrazione del lemma 1.2 nel caso di una coppia $i, j$ con $j = i+1$ si vede che scambiando due colonne vicine la F cambia segno. Ora prendiamo una matrice $A$ che abbia la colonna $i$ esima e la colonna $j$ esima uguali con $i < j$ ma $j$ non necessariamente uguale ad $i+1$. Se a partire dalla matrice $A$ scambiamo successivamente la colonna $i$ con la colonna $i+1$, di questa nuova matrice scambiamo la colonna $i+1$ con la $i+2$ e cosi' via fino a che la colonna $i$ esima di $A$ non si trovi accanto alla sua colonna $j$ esima. Applicando la $F$ a questa sequenza di matrici a partire dalla matrice $A$ otteniamo tutti numeri o uguali o di segno opposto, ma alla fine troveremo il valore 0. Percio' $F(A) = 0$. ■

Vogliamo provare ora l'esistenza della funzione determinante, definiamo un candidato determinante sulle matrici $n \times n$ per induzione su $n$.

Per $n = 1$ poniamo $det(a) = a$, questa funzione soddisfa tutte e tre le proprieta'. Supponiamo di aver definito una funzione che soddisfi tutte e tre le proprieta' per tutte le matrici $(n-1 \times (n-1)$, vogliamo definire un candidato determinante per le matrici $n \times n$.

Sia $A$ e' una matrice $n \times n$ e siano dati due indici $i$ e $j$ tra 1 ed $n$, indichiamo con $A(i, j)$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da $A$ rimuovendo la riga $i$ esima e la colonna $j$ esima. Supponiamo di aver definito una $F$ candidato determinante che soddisfi tutte e tre le propriet' per le matrici $(n-1) \times (n-1)$ e indichiamo con $D_{i,j}$ il valore di questa funzione applicata alla matrice $A(i, j)$ Abbiamo allora il seguente

**Theorem 1.5** *Sviluppo di Laplace per righe del determinante. Fissato un indice $i$ compreso tra 1 ed $n$ Se prendiamo come $F$ la funzione*

$$F(A) = (-1)^{i+1}a_{i,1}D_{i,1} + (-1)^{i+2}a_{i,2}D_{i,2} + \dots (-1)^{i+n}a_{i,n}D_{i,n}$$

*questa $F$ soddisfa tutte e tre le proprieta' del teorema 1.1.*

Come si vede la riga $i$ esima della matrice resta fissa e cambiano le varie colonne, per questo si chiama sviluppo di Laplace rispetto alla $i$ esima riga.

**Example 1.6** *Nel caso di matrici $2 \times 2$ prendendo $i = 1$ troviamo $D_{1,1} = a_{2,2}$, $D_{1,2} = a_{2,1}$ e otteniamo $det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.*

Proviamo ora il teorema 1.5.

Partiamo dalla proprieta' 3) e consideriamo la matrice identita'. Dato che l'identita' ha tutti zeri fuori dalla diagonale nella somma dello sviluppo di Laplace rispetto alla riga $i$ esima sopravvive solo il termine $(-1)^{i+i}a_{i,i}D_{i,i}$. D'altra parte se togliamo dalla matrice identita' $(n \times n)$ la riga $i$ esima e la colonna $i$ esima resta la matrice identit' $(n-1) \times (n-1)$. Per l'ipotesi di induzione il nostro candidato determinante per le matrici $(n-1) \times (n-1)$ deve valere 1 sulla matrice identita', Cioe' $D_{i,i} = 1$. Dato che gli elementi sulla diagonale della matrice identita' sono tutti 1 otteniamo che per la matrice identita' $n \times n$ si ha che $(-1)^{i+i}a_{i,i}D_{i,i} = 1$.

Per quanto riguarda la proprieta' 1) fissiamo un indice $k$ compreso tra 1 ed $n$. Dato un indice $j$ tra 1 ed $n$ diverso da $k$, se nella matrice $A$ modifichiamo la $k$ esima colonna sostituendola con una combinazione lineare di due vettori colonna e lasciamo invariate tutte le altre colonne i coefficienti $a_{i,j}$ restano invariati. D'altra parte per ipotesi induttiva i termini $D_{i,j}$ cambiano linearmente. il termine $(-1)^{i+j}a_{i,j}D_{i,j}$ cambia allora linearmente. Consideriamo ora il termine $(-1)^{i+k}a_{i,k}D_{i,k}$. Se si modifica solo la $k$ esma colonna sostituendola con una combinazione lineare di vettori colonna, la matrice $A(i, k)$ resta invariata, quindi resta invariato anche $D_{i,k}$ mentre il coefficiente $a_{i,k}$ cambia linearmente. Quindi il termine $(-1)^{i+k}a_{i,k}D_{i,k}$ cambia linearmente. La somma di termini che cambiano linearmente cambia linearmente, questo dimostra la proprieta' 1).

Usando il Lemma 1.4 vediamo che per provare la propriet' 2) sara' sufficiente provare che il nostro candidato determinante vale zero su una matrice che abbia due colonne vicine uguali. Supponiamo quindi che la matrice $A$ sia tale che $A^k = A^{k+1}$.

Se $j$ e' diverso da $k$ la matrice $A(i,j)$ ha allora due colonne vicine uguali e per ipotesi induttiva $D_{i,j} = 0$. Il nostro candidato determinante risulta allora uguale a $(-1)^{i+k}a_{i,k}D_{i,k} + (-1)^{i+k+1}a_{i,k+1}D_{i,k+1}$. D'altra parte dato che $A^k = A^{k+1}$ se ne deduce che $a_{i,k} = a_{i,k+1}$. Inoltre per $1 \leq s \leq k-1$ la $s$ esima colonne di $A(i,k)$ si ottiene togliendo il termine $a_{i,s}$ dalla colonne $A^s$ di $A$, la colonna $k$ esima della matrice $A(i,k)$ e' ottenuta togliendo il termine $a_{i,k+1}$ dalla colonna $A^{k+1}$, e le colonne $k+s$ esima di $A(i,k)$ si ottiene togliendo il termine $a_{i,s+1}$ dalla colonna $A^{s+1}$. Similmente per la matrice $A(i,k+1)$. Dato che $A^k = A^{k+1}$ risulta che $A(i,k) = A(i,k+1)$, quindi $D_{i,k} = D_{i,k+1}$. In conclusione

$$(-1)^{i+k}a_{i,k}D_{i,k} + (-1)^{i+k+1}a_{i,k+1}D_{i,k+1} = (-1)^{i+k}a_{i,k}D_{i,k}(1-1) = 0.$$

Abbiamo quindi verificato tutte le tre proprieta', provando cosi' l'esistenza di un candidato funzione determinante.

Vogliamo ora provare l'unicit' della funzione determinante.

Dato un intero positivo n, sia $S_n$ il gruppo delle permutazioni cioe' delle applicazioni biunivoche dell' insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ in se' stesso. Questo e' un gruppo rispetto all' operazione di composizione di applicazioni.

Dati due indici $i$ e $j$ con $1 \leq i < j \leq n$, Chiamiamo trasposizione che scambia $i$ e $j$ l'elemento $\tau_{i,j} \in S_n$ cosi' definito :

$\tau_{i,j}(i) = j,\ \tau_{i,j}(j) = i, \tau_{i,j}(k) = k$ se $k \neq i$ $k \neq j$. Dai corsi di algebra sappiamo che valgono i due seguenti teoremi:

**Theorem 1.7** *Ogni elemento di $S_n$ e' composizione di trasposizioni.*

**Theorem 1.8** *Esiste una applicazione segno : $S_n \to \{-1, 1\}$ con le seguenti propriet':*

$$segno(\sigma_1 \circ \sigma_2) = segno(\sigma_1)segno(\sigma_2).$$

*Per ogni trasposizione $\tau$, si ha $segno(\tau) = -1$*

In particolare dal teorema 1.8 segue che $segno(Id) = 1$, e $segno(\sigma^{-1}) = \frac{1}{segno(\sigma)} = segno(\sigma)$.

Inoltre dai teoremi sopra si puo' dedurre che, benche' il modo di decomporre una permutazione $\sigma$ come prodotto di trasposizioni non sia unico, se una permutazione si puo' scrivere come prodotto di un numero pari, rispettivamente dispari, di trasposizioni, allora ogni altra decomposizione di $\sigma$ come prodotto di trasposizioni avra' un numero pari, rispettivamente dispari di elementi.

Vediamo ora l'unicita' della funzione determinante provando la validita' di una formula per il calcolo del determinante che bench' poco utilizzabile in pratica, ha alcune interessanti implicazioni

**Theorem 1.9** *Sia $F$ una funzione che soddisfi le propriet' 1),2) 3) del teorema 1.1 allora vale la formula :*

$$F(A) = \sum_{\sigma \in S_n} segno(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}a_{\sigma(3),3}\ldots a_{\sigma(n),n}$$

*In particolare questa formula mostra l'unicita' della funzione determinante.*

*Proof.* Sia $e_1, e_2, \dots e_n$ la base canonica in $k^n$.

Dalla linearit' di $F$ sulla prima colonna abbiamo

$$F(A) = F(A^1, A^2, \dots, A^n) = F(\sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1,1} e_{j_1}, A^2, \dots A^n) = \sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1,1} F(e_{j_1}, A^2, \dots, A^n).$$

Dalla linearita' di $F$ sulla seconda colonna abbiamo

$$F(e_{j_1}, A^2, \dots, A^n) = F(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{j_2,2} e_{j_2}, A^3, \dots A^n) = \sum_{j_2=1}^{n} a_{j_2,2} F(e_{j_1}, e_{j_2}, A^3, \dots, A^n).$$

Procedendo allo stesso modo su le altre colonne si trova alla fine la formula:

$$F(A) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^{n} a_{j_1,1} a_{j_2,2} \dots a_{j_n,n} F(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}).$$

Dalla proprieta' 2) sappiamo che se nella sequenza $(j_1, j_2, \dots j_n)$ ci sono due indici uguali abbiamo $F(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) = 0$. Ora nella sequenza $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ non ci sono indici uguali se e solo se esiste $\sigma \in S_n$ tale che $(j_1, j_2, \dots j_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$. Ora se $\sigma$ e' una permutazione e $\tau$ una trasposizione in $S_n$ segue dalla alternanza della $F$ (vedi Lemma 1.2) che $F(e_{\tau(\sigma(1))}, e_{\tau(\sigma(2))}, \dots, e_{\tau(\sigma(n))}) = -F(e_{\sigma(1))}, e_{\sigma(2))}, \dots, e_{\sigma(n)})$. D'altra parte se $\sigma$ si scrive come prodotto di trasposizioni nella forma $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \dots \circ \tau_k$, allora $\tau_1 \circ \sigma = \tau_2 \circ \tau_3 \dots \circ \tau_k$. Quindi procedendo per induzione sul numero $k$ di trasposizioni che decompongono $\sigma$ si trova che $F(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = segno(\sigma) F(e_1, \dots, e_n))$. In fine per la proprieta' 3) $F(e_1, \dots, e_n)) = 1$. ∎

**Theorem 1.10** *Vale la formula*

$$\sum_{\sigma \in S_n} segno(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} segno(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

*Se ne deduce che* $det(A) = det(A^t)$.

*Proof.* Dato che la trasformazione $\sigma \to \sigma^{-1}$ da $S_n$ in se' e' iniettava e suriettiva, abbiamo:

$$\sum_{\sigma \in S_n} segno(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} segno(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} a_{3,\sigma^{-1}(3)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

Se $\sigma^{-1}(h) = k$ allora $a_{h,\sigma^{-1}(h)} = a_{\sigma(k),k}$ da cui segue che per ogni $\sigma \in S_n$ abbiamo

$$a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} a_{3,\sigma^{-1}(3)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Ricordando che $segno(\sigma) = segno(\sigma^{-1})$ si conclude la dimostrazione del teorema. ∎

Sfruttando il teorema 1.10 e con dimostrazione analoga a quella del lemma 1.2 si ottiene subito il seguente corollario:

**Corollary 1.11** *La funzione determinante e' multilineare sulle righe, alternante sulle righe, vale zero sulle matrici che abbiano due righe uguali e vale* 1 *sulla matrice identita'.*

Con una dimostrazione analoga a quella del teorema 1.9 si vede che la funzione determinante e' l'unica che soddisfa le propriet' del corollario 1.11.

Inoltre dal teorema 1.10 e dal teorema 1.12 si ottiene subito il seguente:

**Theorem 1.12** *Sviluppo di Laplace per colonne del determinante. Fissato un indice $i$ compreso tra 1 ed $n$ Si ha*

$$det(A) = (-1)^{1+i}a_{1,i}D_{1,i} + (-1)^{2+i}a_{2,i},D_{2,i} + \dots (-1)^{n+i}a_{n,i}D_{n,i}.$$

Esempio

Se $A$ e' una matrice $n \times n$ e $\lambda$ e' un elemento di $K$, allora $det(\lambda A) = \lambda^n del(A)$. Infatti le colonne di $\lambda A$ sono $\lambda A^1, \lambda A^2, \dots \lambda A^n$.

Per linesrita' sulla prima colonna abbiamo

$$det(\lambda A^1, \lambda A^2, \dots, \lambda A^n) = \lambda det(A^1, \lambda A^2, \dots \lambda A^n).$$

Per linearita' sulla seconda colonna abbiamo

$$det(\lambda A^1, \lambda A^2, \dots \lambda A^n) = \lambda^2 det(A^1, A^2, \lambda A^3, \dots, \lambda A^n).$$

Cosi' procedendo alla fine otteniamo $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

Una matrice quadrata $A$ si dice triangolare superiore se tutti i suoi elementi al di sotto della diagonale sono nulli, cio' se $a_{i,j} = 0$ quando $i > j$.

**Proposition 1.13** *Se $A$ e' una matrice $n \times n$ triangolare superiore allora $det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \dots a_{n,n}$.*

*Proof.* Procediamo per induzione su $n$, per $n = 1$ il risultato e' immediato, Ammettiamo il risultato vero per matrici triangolari superiori $(n-1) \times (n-1)$ e sia $A$ una matrice triangolare superiore $n \times n$. Facendo lo sviluppo di Laplace del determinante di $A$ secondo la prima riga otteniamo $det(A) = (-1)^{1+1}a_{1,1}D_{1,1} + (-1)^{1+2}a_{1,2}D_{1,2} + \dots (-1)^{1+n}a_{1,n}D_{1,n}$. D'altra parte ogni matrice $A(1, j)$ per $j > 1$ ha la prima colonna nulla, quindi per linearita' del determinante sulla prima colonna $det(A(1, j)) = D_{1,j} = 0$ per $j > 1$. Percio' $det(A) = a_{1,1}D_{1,1}$. D'altra parte $D_{1,1} = det(A(1, 1))$ e' la matrice $A(1, 1)$ e' una matrice $(n-1) \times (n-1)$ triangolare superiore con elementi sulla diagonale $a_{2,2}, a_{3,3} \dots a_{n,n}$. Allora per ipotesi induttiva otteniamo $D_{1,1} = a_{2,2}a_{3,3} \dots a_{n,n}$ e in conclusione $det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \dots a_{n,n}$. ■

**Example 1.14** *Sia $S$ una matrice $n \times n$ a scala, se l'ultima riga di $S$ e' nulla $det(S) = 0$, altrimenti la matrice $S$ ha $n$ pivot (tutti non nulli), e' una matrice triangolare superiore e i suoi pivot si trovano sulla diagonale. Quindi $det(S) = p_1p_2 \dots p_n \neq 0$.*

Infatti se $S$ ha l'ultima riga nulla per linearita' del determinante sulle righe (corollario 1.11), si ha che $det(S) = 0$. Se l'ultima riga di $S$ non e' nulla la matrice ha rango $n$ ed e' una matrice triangolare superiore con i pivot sulla diagonale, la formula $det(S) = p_1p_2 \dots p_n$ segue allora dalla proposizione 1.13.

**Proposition 1.15** *Sia $A$ una matrice $n \times n$ e sia $S$ una sua ridotta a scala attraverso il procedimento di eliminazione di Gauss. Se l'ultima riga di $S$ e' nulla $det(A) = 0$, altrimenti $det(A) = (-1)^m p_1 p_2 \dots p_n \neq 0$. Dove $p_1, p_2, \dots p_n$ sono i pivot di $S$ ed $m$ e' il numero di scambi di righe che e' stato necessario per passare dalla matrice $A$ alla matrice $S$.*

*Proof.* Fissati due indici $i$ e $j$ con $1 \leq i < j \leq n$ abbiamo chiamato operazione elementare sulle righe il passaggio da una matrice $A$ con righe $A_1, A_2, \dots A_n$ ad una matrice $A'$ le cui righe siano $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_{j-1}, \lambda A_i + A_j, A_{j+1}, \dots A_n$ con $\lambda \in K$. Ora per multilinearita' del determinante sulle righe,

$$det(A') = \lambda det(A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, \dots, A_n) + det(A) = det(A)$$

perche' una matrice con due righe uguali ha determinante nullo. D'altra parte se scambiamo due righe in una matrice lasciando le altre invariate il determinante cambia segno. Ora il passaggio dalla matrice $A$ alla matrice a scala $S$ attraverso l'eliminazione di Gauss si ottiene con una sequenza di operazioni elementari e di scambi di righe, quindi $det(S) = (-1)^m det(A)$. La proposizione segue allora dall'esempio 1.14. ■

**Proposition 1.16** *Una matrice $A$ $n \times n$ ha rango $n$ se e solo se $det(A) \neq 0$.*

*Proof.* Sia $S$ una ridotta a scala di Gauss di $A$, allora $A$ ha rango $n$ se e solo se $S$ ha $n$ pivot, se e solo se l'ultima riga di $S$ non e' nulla, la proposizione segue allora dalla proposizione 1.15.

■

**Theorem 1.17** *Siano $A$ e $B$ matrici $n \times n$, allora $det(AB) = det(A)det(B)$.*

*Proof.*

Supponiamo che $det(A) = 0$, allora $det(A)det(B) = 0$. Dobbiamo verificare che $det(AB) = 0$. Ora se $det(A) = 0$ il rango di $A$ e' minore di $n$, Ricordando che il rango per righe coincide con il rango per colonne, troviamo che le righe di $A$ sono linearmente dipendenti, cioe' esiste una combinazione lineare $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \dots, + \lambda_n A_n = 0$ e $\lambda_i \neq 0$ per qualche $i$ tra 1 ed $n$. Le righe di $AB$ sono $A_1 B, A_2 B, \dots, A_n B$ e vale $\lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 B, \dots, + \lambda_n A_n B = 0$ con $\lambda_i \neq 0$, quindi il rango di $AB$ e' minore di $n$ e $det(AB) = 0$. Se $det(A) \neq 0$ definiamo

$$F(B) = \frac{det(AB)}{det(A)}.$$

Allora si ha che $F(I) = 1$ dove $I$ e' la matrice identita'. Inoltre se $X$ ed $Y$ sono vettori colonna di $n$ componenti e $\alpha$ e $\beta$ sono scalari in $K$, e se $B^1, \dots B^{i-1}, B^{i+1}, \dots B^n$ sono altri vettori colonna di $n$ componenti, allora vale la formula

$$F\left(B^1, B^2, \dots B^{i-1}, \alpha X + \beta Y, B^{i+1}, \dots B^n\right)$$

$$= \frac{det\left(B^1, B^2, \dots B^{i-1}, \alpha X + \beta Y, B^{i+1}, \dots B^n\right)}{det(A)}$$

$$= \frac{\alpha det\,(B^1, B^2, \ldots B^{i-1}, X, B^{i+1}, \ldots B^n)}{det(A)} + \frac{\beta det\,(A^1, A^2, \ldots A^{i-1}, Y, A^{i+1}, \ldots A^n)}{det(A)}$$
$$= \alpha F\left(B^1, B^2, \ldots B^{i-1}, X, B^{i+1}, \ldots B^n\right) + \beta F\left(B^1, B^2, \ldots B^{i-1}, Y, B^{i+1}, \ldots B^n\right).$$

cioe' $F$ e' multilineare sulle colonne. In fine se $B^1, B^2, \ldots B^n$ sono le colonne di $B$ allora $AB^1, AB^2, \ldots AB^n$ sono le colonne di $AB$. Quindi se $B^i = B^j$ per $1 \leq i < j \leq n$, anche $AB^i = AB^j$, quindi $det(AB) = 0$, da cui $F(B) = 0$. Dall'unicita' della funzione che soddisfa le proprieta' del teorema 1.1 si trova che $\frac{det(AB)}{det(A)} = det(B)$. ■

# 2 Uso del determinante

Ricordiamo che una matrice $A$ $n \times n$ si dice invertibile se e solo se esiste una matrice $B$ $n \times n$ tale che $AB = BA = I$. In tal caso la matrice $B$ si dice inversa di $A$.

**Proposition 2.1** *Se l'inversa di una matrice $A$ esiste essa e' unica.*

*Proof.*
Se $AB_1 = B_1A = I$ e $AB_2 = B_2A = I$, allora $B_2AB_1 = B_2(AB_1) = B_2I = B_2$. Mentre $B_2AB_1 = (B_2A)B_1 = IB_1 = B_1$. ■

L'inversa di $A$ quando esiste si indica con $A^{-1}$.

**Theorem 2.2** *Sia $A$ una matrice $n \times n$, allora i fatti seguenti sono equivalenti:*

1)*Il rango di $A$ e' $n$*
2)*Le righe di $A$ sono linearmente indipendenti*
3)*Le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti*
4)*L'unica soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ e' il vettore $X = 0$*
5)*Per ogni vettore colonna $b$ di $n$ componenti, esiste una ed una sola soluzione del sistema lineare non omogeneo $AX = b$*
6)*La matrice $A$ e' invertibile*
7)$det(A) \neq 0$.

*Proof.* Il rango per colonne di $A$ e' uguale al rango per righe, quindi 1) equivale a 2) equivale a 3).

Sappiamo dalla proposizione 1.16 che 1) equivale a 7).

Ricordiamo che se $X$ e' un vettore colonna con componenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, allora $AX = x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots x_nA^n$. Quindi 4) equivale a 3).

Ovviamente 5) implica 4) implica 3). La 3) implica che gli $n$ vettori colonna di $A$ sono una base di $K^n$ e, grazie all'osservazione precedente questo implica 5). Quindi 1),2),3),4)5) e 7) sono equivalenti.

Supponiamo sia vera la 6) e sia $X$ un vettore colonna tale che $AX = 0$, allora $X = IX = A^{-1}(AX) = 0$ vale quindi la 4). Se vale la 4) vale la 5). Siano $e_1, e_2, \ldots e_n$ i vettori colonna della base canonica di $K^n$. Siano $b^1, b^2, \ldots$ i vettori soluzione dei sistemi $Ab^i = e^i$, (che esistono e sono unici grazie alla 5), e sia $B$ la matrice che ha per colonne i vettori $b^1, b^2, \ldots b^n$. Abbiamo allora la relazione $AB = I$. D'altra parte se vale la 5) per la matrice $A$ vale la 7) quindi $det(A) \neq 0$, e dalla proposizione 1.10 $det(A^t) \neq 0$ e deve valere la 5) per $A^t$. Dalle considerazione sopra sappiamo che esiste una matrice $C$ $n \times n$ tale che $A^tC = I$ e facendo la trasposta troviamo $C^tA = I$. Poniamo $B_1 = B,\ B_2 = C^t$, abbiamo allora: Quindi $B_2AB_1 = (B_2A)B_1 = IB_1 = B_1$, mentre $B_2AB_1 = B_2(AB_1) = B_2I = B_2$. Quindi vale la 6). ■

Grazie al teorema precedente sappiamo che se $det(A) \neq 0$ ogni sistema lineare non omogeneo $AX = b$ deve avere una ed una sola soluzione. Vogliamo ora determinare questa soluzione usando il determinante.

**Theorem 2.3** *Teorema di Cramer sia $A$ una matrice $n \times n$ con $det(A) \neq 0$, sia $b$ un vettore colonna in $n$ componenti, e sia $X$ l'unica soluzione (grazie al teorema 2.2) del sistema lineare non omogeneo $AX = b$. Siano $x_1, x_2, \dots x_n$ le componeti di $X$. Vale allora per ogni $i$ compreso tra 1 ed $n$, la formula*

$$x_i = \frac{det\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots A^n\right)}{det(A)}.$$

*Proof.*

Come abbiamo precedentemente osservato possiamo scrivere

$$b = AX = x_1A^1 + x_2A_2 \dots + x_nA_n$$

quindi per la multilinearita' del determinante sulle colonne abbiamo:

$$\begin{aligned} & det\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots A^n\right) \\ = & det\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, x_1A^1 + x_2A_2 \dots + x_nA_n\, A^{i+1}, \dots A^n\right) \\ & = x_1det\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, A_1, A^{i+1}, \dots A^n\right) \\ & +x_2det\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, A_2, A^{i+1}, \dots A^n\right) + \dots \\ & +x_ndet\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, A_n, A^{i+1}, \dots A^n\right). \end{aligned}$$

D'altra parte se $k$ e' diverso da $i$ la matrice $(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, A_k, A^{i+1}, \dots A^n)$ ha due colonne uguali, quindi $x_kdet\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots A^n\right) = 0$. Se ne ricava quindi la relazione

$$det\left(A^1, A^2, \dots A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots A^n\right) = x_idet(A).$$

■

Il teorema di Cramer ci permette anche di ricavare una formula per il calcolo della matrice inversa di una matrice $A$ $n \times n$ con $det(A) \neq 0$. in tremini di determinanti. Tale matrice e' infatti invertibile grazie al teorema 2.2.

Ricordiamo che data una matrice $A$ $n \times n$ abbiamo indicato con $A(i,j)$ la marice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta togliendo da $A$ la riga $i$ esima e la colonna $j$ esime ed abbiamo indicato con $D_{i,j}$ il determinante di $A(i,j)$. Ora indichiamo con $P$ la matrice che come componente $i, j$ abbia il numero $(-1)^{i+j}D_{i,j}$. ed indichiamo con $Agg(A)$ (matrice aggiunta di A), la matrice $P^t$.

**Theorem 2.4** *Se $A$ e' una matrice $n \times n$ con determinante non nullo (quindi invertibile), vale la formula*

$$A^{-1} = \frac{Agg(A)}{det(A)} = \frac{P^t}{det(A)}.$$

*Proof.*

Siano $e_1, e_2, \ldots e_n$ i vettori della base canonica di $K^n$. Sia $B = A^{-1}$ e siano $b^1, b^2, \ldots, b^n$ le colonne di $B$. Per ogni $i$ tra 1 ed $n$ e' allora soddisfatto il sistema lineare $Ab^i = e_i$. Osserviamo ora che il termine $b_{j,i}$ della matrice $B$ e' la $j$ esima componente del vettore colonna $b^i$. Per il teorema di Cramer si ha

$$b_{j,i} = \frac{det\left(A^1, A^2, \ldots A^{j-1}, e_i, A^{j+1}, \ldots A^n\right)}{det(A)}. = \frac{det(C)}{det(A)}$$

dove $C = \left(A^1, A^2, \ldots A^{i-1}, e_i, A^{i+1}, \ldots A^n\right)$. Calcoliamo ora il determinante di $C$ usando lo sviluppo di Laplace rispetto alla $i$ esima riga. Tutte le matrici $C(i,k)$ con $k$ diverso da $j$ hanno una colonna nulla, quindi hanno determinante 0. Percio' vale la formula

$det(C) = (-1)^{i+j} c_{i,j} det(C(i,j))$. Ora $c_{i,j} = 1$, e $C(i,j) = A(i,j)$.

In altre parole $B^t = \frac{P}{det(A)}$. ■

Esempio

Consideriamo una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tale che $det(A) = ad - bc \neq 0$ allora

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

cioe' $Agg(A)$ si ottiene scambiando gli elementi sulla diagonale di $A$ e lasciando gli altri al loro posto ma con il segno cambiato. Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Sia $A$ una matrice $m \times n$ (quindi non necessariamente quadrata) siano dati due interi $p$ e $q$ con $1 \leq p \leq m,\ 1 \leq q \leq n$. Scegliamo $p$ indici $i_1, \ldots i_p$ e $q$ indici $j_1, \ldots j_q$ tali che $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \ldots i_p \leq m$ e $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < i_q \leq n$. L'insieme degli elementi della matrice $A$ che si trovano simultaneamente sulle righe $i_1, i_2, \ldots, i_p$ e sulle colonne $j_1, j_2, \ldots, j_q$ formano una matrice $B$ $p \times q$ "contenuta " nella matrice $A$. Ogni matrice di questo tipo si dice "sottomatrice" di $A$.

**Lemma 2.5** *Sia $A$ una matrice $m \times n$ e sia $k$ un intero tale che $1 \leq k \leq m$, e $1 \leq k \leq n$. Sia $B$ una sottomarine $k \times k$ di $A$. Siano $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_k \leq m$ gli indici delle righe di $A$ che contengono qualche elemento di $B$, e siano $1 \leq j_1 < j_2 < j_k \leq n$ gli indici delle colonne che contengono qualche elemento di $B$. Se $det(B) \neq 0$ allora le righe $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ sono linearmente indipendenti, e similmente le colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, \ldots, A^{j_k}$ sono linearmente indipendenti.*

*Proof.*

Se del vettore riga $A_{i_1}$ consideriamo solo gli elementi che si trovano sulle colonne di indice $j_1, j_2, \ldots, j_k$ otteniamo il vettore riga $B_1$ della matrice $B$, se del vettore riga $A_{i_2}$ consideriamo solo gli elementi che si trovano sulle colonne di indice $j_1, j_2, \ldots, j_k$ otteniamo il vettore riga $B_2$ della matrice $B$, e cosi' via. Supponiamo allora di avere una combinazione lineare

$$\lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \lambda_3 A_{i_3} + \lambda_k A_{i_k} = 0.$$

Se dei vari vettori riga consideriamo solo gli elementi che si trovano sulle colonne di indice $j_1, j_2, \ldots, j_k$ otteniamo la combinazione lineare

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3 + \ldots \lambda_k B_k = 0.$$

Dato che $det(B) \neq 0$, per il teorema 2.2 i vettori riga di $B$ sono linearmente indipendenti, quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$. Percio' i vettori $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$ sono linearmente indipendenti. Similmente se del vettore colonna $A^{j_1}$ consideriamo solo gli elementi che si trovano sulle righe di indice $i_1, i_2, \ldots, i_k$ otteniamo il vettore colonna $B^1$, se del vettore colonna $A^{j_2}$ consideriamo solo gli elementi che si trovano sulle righe di indice $i_1, i_2, \ldots, i_k$ otteniamo il vettore colonna $B^2$, e coi' via. Supponiamo allora di avere una combinazione lineare

$$\lambda_1 A^{j_1} + \lambda_2 A^{j_2} + \lambda_3 A^{j_3} + \lambda_k A^{j_k} = 0.$$

Se dei vari vettori colonna consideriamo solo gli elementi che si trovano sulle righe di indice $i_1, i_2, \ldots, i_k$ otteniamo la combinazione lineare

$$\lambda_1 B^1 + \lambda_2 B^2 + \lambda_3 B^3 + \ldots \lambda_k B^k = 0.$$

Dato che $det(B) \neq 0$, per il teorema 2.2 i vettori colonna di $B$ sono linearmente indipendenti, quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$. Percio' i vettori $A^{j_1}, \ldots A^{j_k}$ sono linearmente indipendenti.

■

Ad esempio se $A$ e' una matrice $m \times n$ non nulla ogni suo elemento non nullo si puo' vedere come una sottomatrice $1 \times 1$ di $A$ con determinante non nullo.

Il precedente Lemma ci permette di dimostrare il:

**Theorem 2.6** *Teorema degli orlati*

*Sia $A$ una matrice $m \times n$ di rango $r$, allora $r = 0$ se e solo se $A$ e' la matrice nulla. Altrimenti sia $B$ una sottomatrice $h \times h$ di $A$ con $det(B) \neq 0$. Allora $h \leq r$, inoltre se $h < r$ esiste una sottomatrice $B'$ $(h+1) \times (h+1)$ di $A$ con $det(B') \neq 0$ tale che $B$ sia una sottomatrice di $B'$. Iterando il procedimento si vede che per ogni intero $l$ con $h \leq l \leq r$ esiste una sottomatrice $\tilde{B}$ $l \times l$ di $A$ con $det(\tilde{B}) \neq 0$ e tale che $B$ sia sottomatrice di $\tilde{B}$. In particolare*

$$r = max\{h : \textit{esiste una sottomatrice } B \ h \times h \textit{ di } A \textit{ tale che } det(B) \neq 0\}.$$

*Piu' precisamente sia $B$ una sottomatrice $h \times h$ di $A$ con $det(B) \neq 0$. Allora*

$$r = max\{l : \textit{esiste una sottomatrice } B' \ l \times l \textit{ di } A \textit{ tale che } det(B') \neq 0$$
$$\textit{e tale che } B \textit{ e' una sottomatrice di } B'\}.$$

*Proof.* Chiaramente $r = 0$ se e solo se $A = 0$. Supponiamo allora $A \neq 0$. Siano $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_h}$ le righe di $A$ che contengono qualche elemento di $B$, Per il lemma 2.5 le righe $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_h}$ sono linearmente indipendenti, quindi $h$ e' minore o uguale alla dimensione dello sottospazio vettoriale $U$ di $K^n$ generato dalle righe di $A$, cioe' dato che $r$ e' la dimensione di $U$ otteniamo $h \leq r$. Se $h < r$ esiste una riga $A_{i_0}$ di $A$ con $i_0$ diverso da $i_1, i_2, \ldots i_h$ tale che le righe $A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots A_{i_h}$ siano linearmente indipendenti. Sia $C$ la sottomatrice $(h+1) \times n$ di $A$ le cui righe siano $A_{i_0}, A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_h}$. Dato che le righe di $C$ sono linearmente indipendenti il rango di $C$ e' $h+1$. Inoltre $B$ e' una sottomatrice di $C$ con determinante non nullo. Siano $C^{j_1}, C^{j_2}, \ldots C^{j_h}$ le colonne di $C$ che contengono qualche elemento di $B$, sempre per il lemma 2.5 le colonne $C^{j_1}, C^{j_2}, \ldots C^{j_h}$ sono linearmente indipendenti. Dato che il rango di $C$ e' $h+1$ per lo stesso ragionamento fatto in precedenza, esiste una colonna $C^{j_0}$ di $C$ con $j_0$ diverso da $j_1, \ldots j_h$ tale che le colonne $C^{j_0}, C^{j_1}, \ldots C^{j_h}$ siano linearmente indipendenti. Sia $D$ la sottomatrice $(h+1) \times (h+1)$ di $C$ le cui colonne sono $C^{j_0}, C^{j_1}, C^{j_2}, \ldots, C^{j_h}$. Dato che le colonne di $D$ sono linearmente indipendenti, per il teorema 2.2 il determinante di $D$ e' non nullo. Inoltre $D$ e' una sottomatrice di $A$ e $B$ e' una sottomatrice di $D$. Ponendo allora $B' = D$ concludiamo la dimostrazione. ■

**Remark 2.7** *Sia $A$ una matrice $m \times n$ di rango $r > 0$. Il teorema degli orlati permette quindi di calcolare $r$ con un procedimento iterativo in due modi possibili: Nel procedimento, a salire, si parte da una sottomatrice $B$ $h \times h$ di $A$ con $\det(B)$ diverso da zero. Siano $A_{i_1}, \ldots A_{i_h}$ le righe di $A$ che contengono qualche elemento di $B$, e siano $A^{j_1}, \ldots A^{j_h}$ le colonne di $A$ che contengono qualche elemento di $B$. Sia $i$ compreso tra $1$ ed $m$ diverso da $i_1, \ldots i_h$, e sia $j$ compreso tra $1$ ed $n$ diverso da $j_1, \ldots j_h$. Esiste un'unica sottomatrice $B'$ di $A$, $(h+1) \times (h+1)$ tale che $B$ sia sottomatrice di $B'$ e tale che $B'$ abbia elementi sulla $i$ esima riga e sulla $j$ esima colonna di $A$. La matrice $B'$ viene detta sottomatrice orlata di $B$. Di ogni tale sottomatrice orlata di $B$ si calcola il determinante, se si ottiene sempre il risultato $0$ il rango di $A$ e' $h$, altrimenti una di tali sottomatrici $(h+1) \times (h+1)$, chiamiamola $B^*$ ha determinante non nullo. Possiamo ora ripetere il procedimento e considerare tutte le sottomatrici $(h+2) \times (h+2)$ di $A$ orlate di $B^*$ e cos' via finche' non arriviamo alla grandezza massima possibile delle sottomatrici a determinante non zero che siano ottenute a partire da $B$ con una successione di orlature. Tale grandezza massima e' il rango di $A$. Nel procedimento a scendere, sia $s$ il minimo tra $m$ ed $n$. Sia $B$ una sottomatrice $h \times h$ di $A$ con determinante non nullo, allora ovviamente se $r$ e' il rango di $A$, si ha $h \leq r \leq s$. Se esiste una sottomatrice $s \times s$ $A'$ di $A$ con determinante non nullo tale che $B$ sia sottomatrice di $A'$ allora il rango di $A$ e' $s$. Altrimenti si considerano tutte le sottomatrici di $A''$, $(s-1) \times (s-1)$ che abbiano $B$ come loro sottomatrice, se una di esse ha determinante non nullo il rango di $A$ e' $s-1$. Altrimenti si considerano tutte le sottomatrici $A'''$ $(s-2) \times (s-2)$ di $A$ che abbiano $B$ come loro sottomatrice e cos' via fino ad arrivare ad una sottomatrice $r \times r$ con determinante non zero, dove $r$ e' il rango di $A$.*

# 3 Volume

Sia $V$ un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$ e sia $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ una base di $V$, chiamiamo parallelepipedo generato dalla base $\beta$ il sottoinsieme $P_\beta$ cosi' definito:

$$P_\beta = \{X \in V : X = t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k \ \text{ con la condizione } 0 \leq t_j \leq 1 \text{ per } 1 \leq j \leq n\}.$$

Chiameremo anche parallelepipedi i traslati di questi, cioe' gli insiemi della forma $P = P_\beta + v_0 = \{X + v_0$, con $v_0$ vettore fissato in $V$ e $X \in P_\beta$ per qualche base $\beta$ base di $V\}$.

Siano date due basi $\beta_1 = \{v_1, \ldots v_2, \ldots, v_k\}$ e $\beta_2 = \{u_1, \ldots u_k\}$ di $V$, dicamo che $P_{\beta_1}$ e $P_{\beta_2}$, soddisfano la condizione di Cavalieri se sono soddisfatte tutte le condizioni seguenti:

1) $span\{v_1, \ldots, v_{k-1}\} = span\{u_1, \ldots, u_{k-1}\} =: W$
2) Se consideriamo il fascio $\mathbf{F} = \{W + v_0 : v_0 \in V\}$ di tutti i sottospazi affini di $V$ paralleli a $W$, si ha che un sottospazio affine di $\mathbf{F}$ interseca $P_{\beta_1}$ se e solo se esso interseca $P_{\beta_2}$.
3) Il volume $n-1$ dimensionale di $\Sigma \cap P_{\beta_1}$ coincide con il volume $n-1$ dimensionale di $\Sigma \cap P_{\beta_2}$ per ogni iperpiano $\Sigma \in \mathbf{F}$ che interseca $P_{\beta_1}$ ( e $P_{\beta_2}$).
Ogni sottospazio affine di $\mathbf{F}$ si considera identificato con $W$ mediante l'opportuna traslazione con un vettore ortogonale a $W$.

Vogliamo allora definire la nozione di volume dei parallelogrammi in $V$ in modo che questa nozione soddisfi i seguenti assiomi :

1) Due parallelepipedi che differiscono per una traslazione hanno lo stesso volume
2) Un parallelepipedo $P_\beta$ dove $\beta = \{v_1, \ldots, v_k\}$ e' una base ortogonale di $V$ (parallelepipedo retto) ha volume pari al prodotto $||v_1||||v_2|| \ldots ||v_k||$ delle norme dei vettori della base.
3) Se due parallelepipedi soddisfano la condizione di Cavalieri, essi hanno lo stesso volume (principio di Cavalieri).

Dall'assioma 2) si vede che, per $n = 1$ e per $\beta = \{v_1\}$, $P_\beta$ e' un segmento ed il suo "volume" e' la sua lunghezza, cioe' $vol(P_\beta) = ||v_1||$.

Ora ricordiamo il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt di una base base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ di $V$.

Per costruire la ortogonalizzata $w_1, \ldots, w_n$ di $\beta$ si procede induttivamente nel modo seguente:

$w_1 = v_1$, $w_{k+1} = v_{k+1} - u_{k+1}$. Dove $u_{k+1}$ e' la proiezione ortogonale di $v_{k+1}$ sul sottospazio vettoriale generato di $w_1, \ldots, w_k$. In fine per trovare l' ortonormalizzata si pone $z_j = \frac{w_j}{||w_j||}$ per $1 \leq j \leq n$.

Sia allora data una base $\beta = \{v_1, \ldots v_k\}$ di $V$, e sia $w_1, \ldots w_n$ la sua ortogonalizzata con il procedimento di Gram Schmidt, vogliamo provare la seguente

**Proposition 3.1** $Vol(P_\beta) = ||w_1||||w_2|| \ldots ||w_k||$.

*Proof.* Abbiamo che $volP_{\{v_1\}} = ||v_1|| = ||w_1||$, supponiamo allora per ipotesi induttiva che $vol(P_{\{v_1,\ldots,v_h\}}) = ||w_1||||w_2|| \ldots ||w_h||$. Consideriamo lo spazio $U = span\{v_1, v_2, \ldots v_{h+1}\}$. E le basi $\beta_1 = \{v_1, v_2, \ldots v_{h+1}\}$, e $\beta_2 = \{v_1, v_2, \ldots v_h, w_{h+1}\}$ dello spazio vettoriale $U$.

I due corrispondenti parallelepipedi soddisfano chiamante le condizioni 1) e 2) di Cavalieri, dato che $w_k = v_k - P_W(v_k)$ dove $P_W$ e' la proiezione ortogonale sullo spazio $W = span\{v_1, v_2, \dots v_h\}$). Ma esse soddisfano anche la condizione 3) perche' le sezioni con i sottospazi affini del fascio **F** dei due parallelepipedi differiscono per una traslazione, quindi $vol(P_{\beta_1}) = vol(P_{\beta_2})$. D'altra parte per l'ipotesi induttiva anche i parallelepipedi $P_{\beta_2}$ e $P_{\beta_3}$ nello spazio $U$ soddisfano la condizione di Cavalieri, dove $\beta_3 = \{w_1, w_2, \dots, w_h, w_{h+1}\}$. Quindi $vol(P_{\beta_2}) = vol(P_{\beta_3})$. In fine per l'assioma 2) del volume abbiamo che $vol(P_{\beta_3}) = ||w_1||||w_2|| \dots ||w_h||$. Procedendo fino ad $h = k$ si prova l'asserto.

■

**Corollary 3.2** *Il volume dei parallelepipedi e' volume di base per altezza, cioe' se* $\beta_1 = \{v_1, v_2, \dots v_{k-1}\}$ *e* $\beta_2 = \{v_1, v_2, \dots v_k\}$ *allora* $vol(P_{\beta_2}) = vol(P_{\beta_1})||w_k||$.

**Theorem 3.3** *Sia* $\beta$ *una base di* $\mathbf{R}^n$ *e sia* $P_\beta$ *il parallelogramma associato a* $\beta$, *sia sia* $A$ *la matrice che ha per colonne i vettori della base, allora il volume di* $P_\beta$ *e' il valore assoluto del determinante della matrice* $S$, *cioe'* $vol(P_\beta) = |det(A)|$.

Abbiamo bisogno di dimostrare preliminarmente alcuni lemmi

**Lemma 3.4** *Siano* $\beta_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ *una base ortonormale di* $\mathbf{R}^n$, *sia* $A$ *la matrice che ha per colonne i vettori della base, allora vale la formula* $A^tA = I$ *in particolare* $det(A) = \pm 1$.

*Proof.*
Infatti $(A^tA)_{i,j} =< u_i, u_j >$ che e' uguale a zero se $i \neq j$, mentre e' uguale ad 1 se $i = j$. Quindi si ottiene $A^tA = I$. Dato che $det(A^t) = det(A)$ e $det(I) = 1$ troviamo $1 = det(A^tA) = det(A^t)det(A) = (det(A))^2$. ■

**Lemma 3.5** *Siano* $\beta_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\beta_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ *due basi di* $\mathbf{R}^n$, *sia* $C$ *la matrice di componenti* $c_{i,j}$ *dove* $w_j = \sum_{i=1}^{j=n} c_{i,j}v_i$, *sia* $P$ *la matrice che ha per colonne i vettori di* $\beta_1$ *e sia* $Q$ *la matrice che ha per colonne i vettori di* $\beta_2$ *allora si ha* $Q = PC$.

*Proof.* Infatti il vettore $w_j$ e' la $j$ esima colonna $Q^j$ della matrice $Q$, che e' uguale a $PC^j$, ma $PC^j$ e' la combinazione lineare delle colonne di $P$ con coefficienti le componenti del vettore $C^j$. Cioe' e' combinazione lineare dei vettori della base $\beta$ con coefficienti le componenti del vettore $C^j$. ■

Dimostriamo ora il teorema 3.3. Sia $\beta_1 = \{w_1, \dots, w_n\}$ la base ortogonalizzata con Gram-Schmidt della base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Abbiamo allora per costruzione

$$w_j = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j}v_i. \tag{1}$$

Per costruzione la matrice $T$ di componenti $t_{i,j}$ e' triangolare superiore ed ha tutti 1 sulla diagonale. Sia $A$ la matrice che ha per colonne i vettori di $\beta$, e sia $M$ la matrice che ha per colonne i vettori della base $\beta_1$, dal Lemma 3.5 segue allora che

$M = AT$ in particolare $det(M) = det(AT) = det(A)det(T) = det(A)$ dato che $T$ e' triangolare superiore con tutti 1 sulla diagonale. Sia ora $z_i = \frac{w_i}{||w_i||}$ la corrispondente base ortonormalizzata. Abbiamo allora $z_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} w_i$ dove la matrice $\Lambda$ di componenti $\lambda_{i,j}$ e' una matrice diagonale tale che $\lambda_{i,i} = \frac{1}{||w_i||}$. Per lo stesso Lemma 3.5, se $Z$ e' la matrice che ha per colonne i vettori $z_1, \ldots z_n$ abbiamo $Z = M\Lambda$, quindi $det(Z) = det(M)det(\Lambda) = det(A)det(\Lambda) = \frac{det(A)}{||w_1|| \; ||w_2|| \; \ldots ||w_n||}$. D'altra parte la matrice $Z$ ha per colonne una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ e per il Lemma 3.4 il determinante di $N$ e' $+1$ o $-1$, e dato che $||w_1|| \; ||w_2|| \; \ldots ||w_n|| \geq 0$ otteniamo $||w_1|| \; ||w_2|| \; \ldots ||w_n|| = |det(A)|$. Ma per la proposizione 3.1 $||w_1|| \; ||w_2|| \; \ldots ||w_n||$ e' il volume del parallelogramma.

Consideriamo ora $V$ uno spazio vettoriale sui reali di dimensione finita, dotato di un prodotto scalare $< >$ definito positivo.

**Theorem 3.6** *Sia $\beta$ una base di $V$ e sia $P_\beta$ il parallelogramma associato a $\beta$, sia $G$ la matrice di componenti $g_{i,j} =< v_i, v_j >$ allora $det(G) > 0$ e $vol(P_\beta) = \sqrt{det(G)}$.*

.

*Proof.* Scegliamo una base ortonormale $k_1, \ldots k_n$ di $V$. Sia $v_\alpha = \sum_{j=1}^{n} s_{j,\alpha} k_j$. Allora

$$g_{\alpha,\beta} =< v_\alpha, v_\beta >=< \sum_{j=1}^{n} s_{j,\alpha} k_j, \sum_{l=1}^{n} s_{l,\beta} k_l >= \sum_{j,l=1}^{n} s_{j,\alpha} s_{l,\beta} < k_j, k_l > .$$

Nel passaggio precedente abbiamo usato la bilinearita' del prodotto scalare. Dato che la base $k_1, \ldots k_n$ e' ortonormale abbiamo $< k_j, k_l >= 0$ se $j$ e' diverso da $l$ e $< k_j, k_j >= 1$. Quindi si ottiene

$$g_{\alpha,\beta} = \sum_{j=1}^{n} s_{j,\alpha} s_{j,\beta} = (S^t S)_{\alpha,\beta}.$$

Cioe' $G = SS^t$. Sia $X$ un vettore colonna di $\mathbf{R}^n$ tale che $SX = 0$, otteniamo quindi

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_\alpha x_\alpha v_\alpha \\ &= \textstyle\sum_\alpha \left(\sum_j s_{j,\alpha} x_\alpha k_j\right) = \sum_j \left(\sum_\alpha s_{j,\alpha} x_\alpha k_j\right) \\ &= \textstyle\sum_j (SX)^j k_j = 0. \end{aligned}$$

Dato che i vettori $v_1, \ldots v_n$ sono linearmente indipendenti otteniamo $X = 0$. In altre parole $det(S) \neq 0$, quindi $det(G) = det(SS^t) = det(S)det(S^t) = (det(S))^2 > 0$. Se ora $w_1, \ldots, w_n$ e' la base ortogonalizzata di *GramSchmidt* di $v_1, \ldots v_n$ ed $H$ e' la matrice data da $H_{\alpha,\beta} =< w_\alpha, w_\beta >$ vediamo che $H$ e' una matrice diagonale con $h_{i,i} = ||w_i||^2$. Quindi per la proposizione 3.1 $det(H) = (Vol(P_\beta))^2$. Resta da far vedere allora che $det(G) = det(H)$. Sostituendo al vettore $w_\alpha$ la formula (1) si ottiene, con le notazioni usate nella dimostrazione del Teorema 3.3 troviamo $h_{\alpha,\beta} = \sum_{i,j} t_{i,\alpha} t_{j,\beta} g_{i,j}$ cioe' $H = T^t G T$ da cui si ricava l'uguaglianza del determinante di $G$ e di $H$ dato che la matrice $T$ e' triangolare superiore con 1 sulla diagonale.

■

# 4 Prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ con prodotto scalare $< >$ definito positivo, iniziamo con un paio di lemmi:

**Lemma 4.1** *Siano $X$ ed $Y$ vettori di $V$, allora $< X, v >=< Y, v >$ per ogni $v \in V$ se e solo se $X = Y$.*

*Proof.*
Chiaramente se $X = Y$, allora $< X, v >=< Y, v >$ per ogni $v \in V$. Viceversa se $< X, v >=< Y, v >$ per ogni $v \in V$, avremmo $< X - Y, v >= 0$ per ogni $v \in V$, se fosse $X - Y \neq 0$ scegliendo $v = X - Y$ arriveremmo ad una contraddizione dato che il prodotto scalare si suppone essere definito positivo. ■

**Lemma 4.2** *Sia $u$ un vettore dello spazio $V$, allora l'applicazione $l_u : V \to \mathbf{R}$ definita da $l(X) =< X, u >$ e' lineare. Viceversa, per ogni $l : V \to \mathbf{R}$ esiste uno ed un solo vettore $u \in V$ tale che $l(X) =< X, u >$ per ogni $X \in V$.*

*Proof.* La linearita' della mappa $l_u$ segue dalla linearita' del prodotto scalare. Viceversa data $l : V \to \mathbf{R}$ lineare, l'unicita' del vettore $u$ che soddisfi la condizione sopra segue dal lemma 4.1. Resta da mostrare l'esistenza. Sia $u_1, u_2, \ldots u_n$ una base ortonormale di $V$, poniamo $u = l(u_1)u_1 + l(u_2)u_2 + \ldots l(u_n)u_n$. Vogliamo provare che $l = l_u$. Dato che $u_1, u_2, \ldots u_n$ e' una base sara' sufficiente provare che $l(u_j) = l_u(u_j)$ per ogni $j$ tra 1 ed $n$. Ma

$$l_u(u_j) =< u_j, u >=< u_j, \sum_{k=1}^{n} l(u_k)u_k >= \sum_{k=1}^{n} l(u_k) < u_j, u_k >= l(u_j)$$

dato che la base e' ortonormale. ■

Consideriamo ora lo spazio vettoriale $V = \mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, fissati due vettori $v,\ w \in \mathbf{R}^3$, per la multilinearita' della funzione determinante, l'applicazione $l(X) = det(v, w, X)$ e' lineare. Esiste quindi per il lemma 4.2 un unico vettore $u \in \mathbf{R}^3$ (che dipende da $v$ e $w$), tale che $det(v, w, X) =< X, u >$ per ogni $X \in \mathbf{R}^3$. Il vettore $u$ cosi' definito si chiama prodotto vettoriale di $v$ e $w$ e si indica con $v \wedge w$. Abbiamo quindi provato la seguente

**Proposition 4.3** *Per ogni coppia di vettori $v$ e $w$ in $\mathbf{R}^3$ esiste uno ed un solo vettore, che indicheremo con $v \wedge w \in \mathbf{R}^3$, che soddisfi la proprieta' seguente:*

$$< X, v \wedge w) = det(v, w, X) \ \textit{per ogni}\ X \in \mathbf{R}^3$$

**Theorem 4.4** *Il prodotto vettoriale ha le seguenti proprieta':*

1) *Linearita' sul primo fattore cioe',*
$(\alpha v_1 + \beta v_2) \wedge w = \alpha(v_1 \wedge w) + \beta(v_2 \wedge w)$
*per ogni* $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ *e per ogni* $v_1, v_2, w \in V$
2) *Linearita' sul secondo fattore cioe',*
$v \wedge (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha(v \wedge w_1) + \beta(v \wedge w_2)$
*per ogni* $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ *e per ogni* $v, w_1, w_2, \in V$.
3) *Antisimmetria* $v \wedge w = -w \wedge v$
4) $v \wedge w = 0$ *se e solo se* $v$ *e* $w$ *sono linearmente dipendenti.*
5) *Se* $v$ *e* $w$ *sono linearmente indipendenti, il vettore (non nullo)* $v \wedge w$ *e' perpendicolare al sottospazio vettoriale generato da* $v$ *e* $w$.
6) *Se* $v$ *e* $w$ *sono linearmente indipendenti,* $det(v, w, v \wedge w) > 0$
7) *Il modulo del vettore* $v \wedge w$ *coincide con l'area del parallelogramma individualo da* $v$ *e* $w$

*Proof.*
Per la definizione del prodotto vettoriale, per la linearita' del determinante sulla prima colonna, e per la linearita' del prodotto scalare sui due fattori, fissato $X$ in $\mathbf{R}^3$ abbiamo:

$$< (\alpha v_1 + \beta v_2) \wedge w, X >= det((\alpha v_1 + \beta v_2), w, X) = \alpha det(v_1, w, X) + \beta det(v_2, w, X) =$$

$$\alpha < v_1 \wedge w, X) + \beta < v_2 \wedge w, X >=< \alpha(v_1) \wedge w) + \beta(v_2 \wedge w), X >$$

Il lemma 4.1 prova allora la proprieta' 1), la dimostrazione della proprieta' 2) e' analoga. Per quel che riguarda la propriet' 3) abbiamo:

$$< w \wedge v, X >= det(w, v, X) = -det(v, w, X) = - < v \wedge w, X >=< -v \wedge w, X > .$$

Concludiamo quindi la dimostrazione della propriet' 3) ancora grazie al lemma 4.1. Se $v$ e $w$ sono linearmente dipendenti lo sono anche i vettori $v,\ w, X$ quindi per la proposizione 1.16 $< 0, X >= 0 = det(v, w, X) =< v \wedge w, X >$ . e invochiamo ancora il lemma 4.1. D'altra parte se $v$ e $w$ sono linearmente indipendenti, esiste $u \in \mathbf{R}^3$ tale che $v,\ w$ e $u$ sono anche essi linearmente indipendenti. Quindi $< v \wedge w, u >= det(v, w, u) \neq 0$, percio' $v \wedge w \neq 0$. Questo conclude la dimostrazione della proprieta' 4). Siano ora $v$ e $w$ vettori linearmente indipendenti, abbiamo $det(v, w, v) = 0 = det(v, w, w)$. Quindi $< v \wedge w, v >=< v \wedge w, w >= 0$. Percio' se $\alpha$ e $\beta$ sono numeri reali $< v \wedge w, \alpha v + \beta w > \alpha < v \wedge w, v > +\beta < v \wedge w, w >= 0$, ovvero il vettore non nullo $v \wedge w$ e' ortogonale al piano generato da $v$ e da $w$ e si ottiene la 5). Ora se $v$ e $w$ sono linearmente indipendenti $det(v, w, v \wedge w) =< v \wedge w, v \wedge w >> 0$ dato che il vettore $v \wedge w$ e' non nullo, e il prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$ e' definito positivo, ovvero la 6). In fine per la 7) se $v$ e $w$ sono linearmente indipendenti, poniamo $n = \frac{v \wedge w}{||v \wedge w||}$. Abbiamo

$$det(v, w, n) = \frac{1}{||v \wedge w||} det(v, w, v \wedge w) = \frac{< v \wedge w, v \wedge w >}{||v \wedge w||} = \frac{||v \wedge w||^2}{||v \wedge w||} = ||v \wedge w|| > 0.$$

Quindi per il teorema 3.3 il modulo di $v \wedge w$ e' il volume del parallelogramma individuato dai vettori $v, w$ ed $n$. Ma $n$ e' ortogonale al piano generato da $v$ e $w$, quindi $n$ e' il vettore altezza di tale parallelogramma. Inoltre $n$ ha norma 1, quindi il volume del parallelogramma individuato da $v$ $w$ ed $n$, coincide con l'area del parallelogramma individuato da $v$ e $w$. ■

Osserviamo che le propriet' 4), 5) 6), 7) caratterizzano il prodotto vettoriale. Infatti la proprieta' 4) determinano quando tale prodotto e' zero, inoltre se non e' zero la proprieta' 5) ne determina la direzione, la proprieta' 6) ne determina il verso e la proprieta' 7) ne determina il modulo.

Ricordiamo inoltre che se $\theta$ e' l'angolo compreso tra due vettori non nulli $v$ e $w$ in $\mathbf{R}^n$, con $0 \leq \theta \leq \pi$, vale la formula $< v, w >= ||v||\ ||w|| \cos(\theta)$. D'altra parte il vettore altezza $h$ del parallelogramma individuato da $v$ e $w$ e' tale che $||h|| = ||v|| \sin(\theta)$. (infatti $0 \leq \theta \leq \pi$ quindi $\sin(\theta) \geq 0$). Percio' l'area del parallelogramma individuato da $v$ e da $w$ e' $||v||\ ||w|| \sin(\theta)$. In particolare se $v$ e $w$ sono in $\mathbf{R}^3$, vale $||v \wedge w|| = ||v||\ ||w||\ \sin(\theta)$.

Vogliamo ora calcolare le coordinate del prodotto vettoriale. Sia $v \in \mathbf{R}^3$ un vettore colonna di coordinate $a, b, c$, sia $w \in \mathbf{R}^3$ un altro vettore colonna di coordinate $d, e, f$ e siano $p, q, r$ le coordinate del prodotto vettoriale $v \wedge w$. Abbiamo quindi $v \wedge w = pe_1 + qe_2 + re_3$, dove $e_1, e_2, e_3$ e' la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Allora dato che la base canonica e' ortonormale si ricava:

$$\begin{aligned} &< v \wedge w, e_1 >= p < e_1, e_1 > +q < e_2, e_1 > +r < e_3, e_1 >= p \\ &< v \wedge w, e_2 >= p < e_1, e_2 > +q < e_2, e_2 > +r < e_3, e_3 >= q \\ &< v \wedge w, e_3 >= p < e_1, e_3 > +q < e_2, e_3 > +r < e_3, e_3 >= r. \end{aligned}$$

Quindi dalla definizione del prodotto vettoriale si ottiene

$$det(v, w, e_1) = p,\ det(v, w, e_2) = q,\ det(v, w, e_1) = r.$$

Scambiando la seconda e la terza colonna, e poi la prima e la seconda colonna, il determinante cambia segno due volte, rimane quindi invariato. Il determinante resta inoltre invariato se sostituiamo una matrice con la sua trasposta, possiamo quindi anche scrivere

$$det((e_1, v, w)^t) = p,\ det((e_2, v, w)^t) = q,\ det((e_3, v, w)^t) = r.$$

Sviluppando con il metodo di Laplace questi ultimi determinanti rispetto alla prima riga ricaviamo:

$$p = (bf - ce), q = (cd - af), r = (ae - bd).$$

Per memorizzare queste formule si usa spesso un trucco formale che non ha realmente senso ma e' comodo per fare i conti. Si scrive una "matrice" che abbia sulla prima riga i tre vettori della base canonica, sulla seconda riga le tre componenti $a, b, c$ del vettore $v$ e sulla terza riga le tre componenti $d, e, f$ del vettore $w$. Sviluppando formalmente il determinante di questa matrice rispetto alla prima riga si ottiene una combinazione lineare dei vettori della base canonica i cui coefficienti sono le coordinate $p, q, r$ del prodotto vettoriale $v \wedge w$.

**Corollary 4.5** *Siano $v$ e $w$ vettori colonna linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^3$, che individuano un parallelepipedo $P$ nel piano generato da $v$ e $w$. Supponiamo che $v$ abbia componenti $a, b, c$ e che $w$ abbia componenti $d, e, f$, allora*

$$(area(P))^2 = ||v \wedge w||^2 = (bf-ce)^2 + (cd-af)^2 + (ae-bd)^2 = < v, v >< w, w > - < v, w >^2 .$$

*Proof.*
Basta usare l'espressione in coordinate del vettore $v \wedge w$ e il corollario 3.6. ∎

## 4.1 volume e prodotto esterno

Sia $W$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n$, dotato di un prodotto scalare definito positivo, dato un intero $k$ con consideriamo lo spazio vettoriale $\bigwedge^k W$ prodotto esterno k esimo di W, dove $\bigwedge^k W = 0$ per $k < 0$ e per $k > n$, mentre ad esempio $\bigwedge^0 W = \mathbf{R}$, e $\bigwedge^1 W = W$. Se $1 \leq k \leq n$ e $w_1, \ldots w_n$ e' una base di $W$, poniamo $w_I = w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \ldots \wedge w_{i_k}$ dove $I = (i_1, i_2, \ldots i_k)$ con $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \ldots < i_k \leq n$

Abbiamo il seguente Lemma di cui omettiamo la dimostrazione

**Lemma 4.6** *Se $1 \leq k \leq n$, l'insieme di vettori $\{w_I\}_{i \in I}$ al variare di tutti i possibili insiemi di indici come sopra, e' una base dello spazio $\bigwedge^k W$, inoltre esiste un unico prodotto scalare definito positivo su $\bigwedge^k W$ tale che per ogni base ortonormale $u_1, \ldots u_n$ di $W$ la corrispondente base $\{u_I\}_{i \in I}$ e' ortonormale in $\bigwedge^k W$. Possiamo poi estendere questi prodotti scalari allo spazio $U$ che e' somma diretta dei vari spazi $\bigwedge^h W$ per $0 \leq h \leq n$ definendoli tra loro ortogonali.*

Sia $V$ un sottospazio vettoriale di dimensione $k$, sia $\beta = \{v_1, \ldots, v_k\}$ e consideriamo su $\bigwedge^k W$ il prodotto scalare descritto nel lemma 4.6. Vale allora il seguente

**Theorem 4.7** $Vol(P_\beta) = ||v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \ldots \wedge v_k||$.

*Proof.* Sia $w_1, w_2, \ldots w_k$ la base ortogonalizzata di Gram Schmidt di $v_1, \ldots, \wedge v_k$. Vogliamo provare che per ogni $h$ compreso tra 1 e $k$ i vettori $w_1 \wedge w_2 \ldots \wedge w_h$ e $v_1 \wedge \ldots \wedge v_h$ nello spazio $U$ coincidono. L'affermazione e' ovvia per $h = 1$, se la supponiamo vera per $h - 1$ la vogliamo dimostrare per $h$. ricordiamo che $w_h = v_h + \sum_{j=1}^{h-1} a_j v_j$ per opportuni coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_{h-1}$. Se l'affermazione e' vera per $h - 1$ abbiamo

$$w_1 \wedge w_2 \ldots \wedge w_h = v_1 \wedge v_2 \ldots \wedge v_{h-1} \wedge w_h = v_1 \wedge v_2 \ldots \wedge v_{h-1} \wedge (v_h + \sum_{j=1}^{h-1} a_j v_j) = v_1 \wedge v_2 \ldots \wedge v_h.$$

Quindi la nostra affermazione e' vera per $h = k$. Scegliamo ora una base ortonormale $u_{k+1} \ldots u_n$ di $V^\perp \subseteq W$. Quindi $\frac{w_1}{||w_1||}, \frac{w_2}{||w_2||}, \ldots \frac{w_k}{||w_k||}, u_{k+1} \ldots u_n$ e' una base ortonormale di $W$. Per il Lemma 4.6

$$1 = ||\frac{w_1}{||w_1||}, \frac{w_2}{||w_2||}, \ldots \frac{w_k}{||w_k||}|| = \frac{||w_1 \wedge w_2, \ldots \wedge w_k||}{||w_1|| ||w_2|| \ldots ||w_k||}.$$

Cioe'

$$||w_1 \wedge w_2 \ldots \wedge w_h|| = ||w_1|| ||w_2|| \ldots ||w_k||.$$

Ora per la proposizione 3.1

$$Vol(P_\beta) = ||w_1|| ||w_2|| \ldots ||w_k||.$$

■

**Lemma 4.8** *Per* $1 \leq k \leq n$, *sia* $\beta_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, *una base del sottospazio* $V$ *di dimensione* $k$, *e sia* $\beta_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ *una base di* $W$. *sia* $C$ *la matrice di componenti* $c_{i,j}$ *dove* $v_j = \sum_{i=1}^{j=k} c_{i,j} w_i$, *allora* $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots v_k = \sum_L D_L w_L$, *dove* $L = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$ *con* $1 \leq l_1 < l_2 < l_3 \ldots < l_k \leq n$. *e* $D_L$ *e' il determinante della sottomatrice di* $C$ *ottenuta scegliendo le colonne* $1, 2, \ldots, k$ *e le righe* $l_1, l_2, \ldots l_k$.

*Proof.* Abbiamo

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots v_k = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k} c_{i_1,1} c_{i_2,2} \ldots c_{i_k,k} w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \ldots \wedge w_{i_k}.$$

Ora se nel multiindice $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ ci sono indici ripetuti, il prodotto $w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \ldots \wedge w_{i_k}$ e' nullo, mentre se il multiindice $(i_1, \ldots i_k)$ e' una permutazione $\sigma \in S_k$ del multiindice $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$ con $1 \leq l_1 < l_2 \ldots < l_k \leq n$ allora

$$w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \ldots \wedge w_{i_k} = (\text{segno di } \sigma) w_L.$$

D'alta parte per lo sviluppo del determinante con l'uso delle permutazioni sappiamo che

$$D(L) = \sum_\sigma (\text{segno } \sigma) c_{\sigma(l_1),1} c_{(\sigma(l_2),2} \ldots c_{\sigma(l_k),k}.$$

■

**Corollary 4.9** *Per* $1 \leq k \leq n$, *sia* $\beta_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, *una base di un sottospazio* $V$ *di dimensione* $k$, *e sia* $\beta_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ *una base ortonormale di* $W$. *sia* $C$ *la matrice di componenti* $c_{i,j}$ *dove* $v_j = \sum_{i=1}^{j=k} c_{i,j} w_i$, *allora con le notazioni del Lemma 4.8 abbiamo* $vol(P_{\beta_1}) = \sqrt{\sum_L D_L^2}$.

*Proof.* Il corollario segue dal Lemma 4.8 e dal Teorema 4.7.
■

**Corollary 4.10** *Per* $1 \leq k \leq n$, *sia* $\beta_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, *una base di un sottospazio* $V$ *di dimensione* $k$, *di* $\mathbf{R}^n$ *e sia e sia* $C$ *la matrice* $(n \times k)$ *che ha per colonne i vettori* $v_1, \ldots v_k$ *allora con le notazioni del Lemma 4.8 abbiamo* $vol(P_{\beta_1}) = \sqrt{\sum_L D_L^2}$.

*Proof.*
Infatti la base canonica e' ortonormale per il prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^n$, e' sufficiente quindi applicare il corollario 4.9
■