1. Compito geometria per ingegneria medica Trapani 25-08-2021

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1 + e_2) = 6e_1 - 6e_2 + 4e_3$, $f(e_1 - e_2) = 2e_1 - 2e_2$, $f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3$. Dove e_1, e_2, e_3 e' la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo. Determinare almeno un autovettore di f ed un suo corrispondente autovalore senza calcolare il polinomio caratteristico di A. Calcolare per quali valori del parametro reale t il vettore $v = \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}$ e' un autovettore di f, e per tali t calcolare il corrispondente autovalore. Sempre senza calcolare il polinomio caratteristico di A, sapendo che la somma con molteplicita' degli autovalori di f e' 5, dire se f e' diagonalizzabile sui reali. (Il calcolo degli autovalori di A mediante il calcolo del polinomio caratteristico, anche se corretto, non aggiungera' punti all'esercizio).

Esercizio 2

Sia $M(3x3, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici $3x3$ a coefficienti reali, sia $f : M(3x3, \mathbb{R}) \to M(3x3, \mathbb{R})$ l'applicazione lineare data da $f(A) = A + A^t$. Determinare sia la dimensione e una base del nucleo di f, che la dimensione e una base dell'immagine di f.

Esercizio 3

Ricordiamo che una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e' una isometria se e solo se esiste una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ tale che l'immagine $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$ sia ancora una base ortonormale, se e solo se la matrice A associata ad f rispetto alle basi caoninche in partenza e in arrivo e' una matrice ortogonale. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + y - 2z, 2x - 2y + z).$$

Determinare la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche in partenza e in arrivo. Dire se e' vero che f e' una isometria. Dire se e' vero che esiste una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ la cui immagine $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$ sia una base ortogonale.

Esercizio 4

Sia Π_1 il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y - z = 0$, e sia Π_2 il piano sempre in $\mathbb{R}^3$, di equazione $2x - y = 0$, sia $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Determinare equazioni parametriche e cartesiane di r. Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per l'origine contenuta in Π_1 ortogonale ad r. Determinare equazioni parametriche della retta $s'(a)$ parallela ad s e passante per il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro reale a. Per quali valori di a la retta $s'(a)$ giace nel piano Π_1?

SOLUZIONI

Esercizio 1

Poniamo $u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 - e_2, u_3 = e_3$, conosciamo $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$, in particolare si vede subito che $f(u_2) = 2u_2$ e dato che $u_2 \neq 0$ per definizione di autovalore e di autovettore vediamo che u_2 e' un autovettore di f di autovalore 2. Per ottenere la matrice richiesta dobbiamo calcolare $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$. Quindi vogliamo scrivere e_1, e_2, e_3 come combinazione lineare di u_1, u_2, u_3. Si ottiene $e_1 = (1/2)u_1 + (1/2)u_2, e_2 = (1/2)u_1 - (1/2)u_2$ e $e_3 = u_3$. Da cui per la lineearita' di f, si trova $f(e_1) = (1/2)f(u_1) + (1/2)f(u_2) = 4e_1 - 4e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = (1/2)f(u_1) - (1/2)f(u_2) = 2e_1 - 2e_2 + 2e_3$, $f(e_3) = f(u_3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3$. Quindi la matrice richiesta A e'

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sempre dalla definizione di autovalore e di autovettore vogliamo capire per quali λ e per quali t vale la relazione

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cioe'

$$\begin{cases} -8 + 2t - 2 = -2\lambda \\ 8 + 2t + 4 = \lambda t \\ -4 + 2t - 6 = -2\lambda \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $\lambda = 5 - t$, e sostituendo nella seconda si ottiene $-t^2 + 7t - 12 = 0$. Si ottengono percio' le coppie di soluzioni $t_1 = 4$ con corrispondente autovalore $\lambda_1 = 1$, e $t_2 = 3$ con corrispondente autovalore $\lambda_2 = 2$. Quindi 1 e 2 sono autovalori di A. Dato che la somma degli autovalori (contati con molteplicita') e' 5 segue che il terzo autovalore di A e' 2. Percio' A ha autovalore 1 con molteplicita' algebrica 1 (quindi molteplicita' geometrica 1) e 2 con molteplicita' algebrica 2. D'altra parte $u_2 = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' un autovettore di autovalore 2, e dai conti sopra sappiamo che anche $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e' autovettore con autovalore 2. Questi due autovettori sono indipendenti, quindi la molteplicita' geometrica dell'autovalore 2 e' almeno 2. Ma la somma delle molteplicita' geometriche e' minore o uguale a 3. Quindi l'autovalore 2 ha molteplicita' geometrica 2. Se ne conclude che A e' diagonalizzabile sui reali.

Esercizio 2

Le matrici appartenenti a $Ker(f)$ sono le matrici A reali 3×3 tali che $A + A^t$ e' la matrice nulla, cioe' le matrici tali che $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$ per ogni coppia di interi i, j compresi tra 1 e 3. In altri termini $A \in Kerf$ se e solo se $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = 0$, $a_{1,2} = -a_{2,1}$, $a_{1,3} = -a_{3,1}$, $a_{2,3} = -a_{3,2}$. Quindi le matrici A in $Ker(f)$ sono individuate in modo unico dai coefficienti $a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,3}$ a cui si possono assegnare valori arbitrari. $a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,3}$ sono cioe' i parametri liberi di $Ker(f)$. Percio' $dim(Ker(f) = 3$ e una base di $Ker(f)$ e' data assegnando ai parametri liberi dati sopra i valori $1, 0, 0$ i valori $0, 1, 0$ e i valori $0, 0, 1$. Ora la dimensione dell spazio vettoriale delle matrici 3×3 e' 9, e dato che $dimKer(f) + dimImm(f) = 9$ ricaviamo che $dim(Imm(f) = 6$. Ora $(A+A^t)^t = A^t+(A^t)^t = A^t+A$. Quindi le matrici dell' immagine di f sono matrici simmetriche $3x3$. Le matrici simmetriche $3x3$ sono le matrici (chiamiamole B) tali che $B = B^t$, sono quindi caratterizzate dalla condizione $b_{i,j} = b_{j,i}$. Sono individuate quindi dai 6 parametri liberi $b_{1,1}, b_{2,2}, b_{3,3}, b_{1,2}, b_{1,3}, b_{2,3}$. Ne concludiamo che l'immagine di f coincide con il sottospazio delle matrici simmetriche 3×3. Una base di tale sottospazio si ottiene assegnando i valori 1 e 0 ai parametri liberi.

Esercizio 3

La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche e'

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

che e' una matrice invertibile, quindi f manda una base in una base. Se v_1, v_2, v_3 sono le colonne di A, si vede che le colonne sono ortogonali tuttavia non hanno norma 1 percio' la matrice A non e' una matrice ortogonale. (Infatti una matrice B e' ortogonale se e solo se $B^tB + I$ il che equivale a dire che le sue colonne sono ortogonali e hanno tutte norma 1). In altri termini v_1, v_2, v_3 e' una base ortogonale ma non e' una base ortonormale. Ne segue che f non e' una isometria. Tuttavia f manda la base canonica e_1, e_2, e_3 (che e' ortonormale) nella base ortogonale v_1, v_2, v_3. Quest'ultimo punto si poteva ottenere anche in altro modo. Essendo infatti la matrice A reale simmetrica, per il teorema spettrale essa ha una base ortonormale u_1, u_2, u_3 di autovettori, con corrispondenti autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, che sono tutti non nulli perche' A e' invertibile, quindi $f(u_1) = \lambda_1 u_1, f(u_2) = \lambda_2 u_2, f(u_3) = \lambda_3 u_3$. Quindi f manda la base ortonormale u_1, u_2, u_3 nella base ortogonale $\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \lambda_3 u_3$.

Esercizio 4

Equazioni parametriche di $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ sono appunto

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Corrispondenti equazioni parametriche sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La retta s essendo ortogonale ad r e passante per l'origine e' contenuta nel piano passante per l'origine ortogonale ad r, cioe' nel piano d equazione $x + 2y + 3z = 0$. Ma s e' anche contenuta nel piano Π_1, quindi equazioni cartesiane di s sono

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza equazione parametrica di s sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $s'(a)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che la retta s e' contenuta in Π_1, la retta $s(a)$ e' contenuta in Π_1 se e solo se $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \in \Pi_1$, se e solo se $1 + a - 1 = 0$, se e solo se $a = 0$.