24-02-2021A.

(1) **A1**
Si consideri un sistema lineare $AX = b$, quali tra le seguenti affermazioni sono sempre vere ?
 (a) Se le righe di A sono linearmente indipendenti il sistema ammette sempre una soluzione (50%)
 (b) Se le colonne di A sono linearmente indipendenti il sistema ammette sempre una soluzione (-50%)
 (c) Se le righe di A sono linearmente indipendenti e il sistema ammette soluzioni allora la soluzione e' unica (-50%)
 (d) Se le colonne di A sono linearmente indipendenti e il sistema ammette soluzioni allora la soluzione e' unica (50%)

(2) **A2**
Sia $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ lo spazio vattoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali, si consideri la matrice
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Sia $L : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2\times 2, \mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da $L(A) = CA$. Quali tra le seguenti affermazioni sono sempre corrette ?
 (a) Ogni autovalore di C e' un autovalore di L (50%)
 (b) Il nucleo di L ha dimensione 0 (-50%)
 (c) Il nucleo di L ha dimensione 1 (-50%)
 (d) Il nucleo di L ha dimensione 2 (50%)

(3) **A3**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?
 (a) La matrice A e' una matrice ortogonale (-50%)
 (b) Le colonne di A sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ (50%)
 (c) le righe di A sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ (-50%)
 (d) Ogni matrice ortogonale ha colonne tra loro ortogonali ed anche righe tra loro ortogonali (50%)

(4) **A4**
In $\mathbb{R}^n$ consideriamo il prodotto scalare canonico, sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, e sia $P_W : \mathbb{R}^n \to W$ la proiezione ortogonale su W. Quali tra le seguenti affermazioni e' sempre vera ?
 (a) Se $x \in \mathbb{R}^n$, allora $P_W(P_W(x)) = P_W(x)$ (50%)
 (b) Se $x \in \mathbb{R}^n$, allora $P_W(P_W(x)) = x$ (-50%)
 (c) Se $x \in \mathbb{R}^n$, allora $< x - P_W(x), P_W(x) >= 0$ (50%)
 (d) Se $x \in \mathbb{R}^n$, allora $< x - P_W(x), x >= 0$ (-50%)

(5) **A5**
Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e positiva su $\mathbb{R}$, siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vettori di V, siano $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vettori di W, quali tra le seguenti affermazioni sono vere ?
 (a) Esiste sempre una applicazione lineare $L : V \to W$ tale che $L(v_i) = u_i$ per ogni i tra 1 ed n, (-50%)
 (b) Tale applicazione esiste ed e' unica se i vettori $v_1, \ldots v_n$ sono linearmente indipendenti (-50%)

(c) Se una tale applicazione esiste ed i vettori sono generatori di V, allora essa e' unica. (50%)

(d) Tale applicazione esiste ed e' unica se i vettori sono linearmente indipendenti e generatori di V (50%)

SOLUZIONI

A 1 risposte 1 OK per Rochet-Capelli, risposta 4 OK perche' dim soluzioni = n-r, risposte 2-3 NO.

A2 Risposta 1 OK infatti se v e' un autovettore (non nullo) di C con autovalore λ, ad esempio la matrice (non nulla) A che ha v, v come colonne e' un autovettore di L di autovalore λ. Risposta 4 ok perche' dim Ker C = 1 e se v e' una base di $KerC$, allora $A \in KerL$ se e solo se le colonne di A sono $\alpha v, \beta v$ con α e β reali. Risposta 2,3 no.

A 3

una matrice e' ortogonale se e solo se le sue colonne sono una base ortoNORMALE, quindi risposta 1 no risposta 2 OK risposta 3 No risposta 4 OK perche' se A e' una matrice ortogonale anche A^t lo e'.

A 4

Se $x \in \mathbb{R}^n$, $P_W(x)$ e' in W e $x - P_W(x) \in W^\perp$, in particolare $P_W(W^\perp) = 0$, quindi risposta 1 OK risposta 2 NO (basta prende ad esempio x non zero in $W^\perp$ risposta 3 OK risposta 4 NO basta prendere ancora x non zero in $W^\perp$.

A 5

Risposta 1 no basta prendere $v_1, .., v_n$ tutti uguali e $u_1, \dots u_n$ non tutti uguali. Risposta 2 no se $v \in V$ ma v non appartiene allo span dei vettori $v_1, \dots v_n$ non c'e' controllo su dove vada il vettore v, quindi l'applicazione anche se esiste non e' unica. Risposta 3 OK, dato che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori ogni vettore v e' combinazione lineare di essi, dato che L e' lineare e sappiamo dove vanno tutti i vettori $v_1, \dots v_n$, sappiamo anche dove vanno tutte le loro combinazioni lineari, quindi una tale L se esiste e' unica. Risposta 4 OK, ogni vettore $v \in V$ e' combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$ in modo unico, quindi esiste ed e' unica una applicazione lineare L che mandi ogni v_i nel corrispondente v_i.