

- (1) (a) Dire per quali valori del parametro k in \mathbf{R} , la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & k-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$$

è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

(b) Si supponga che, al variare di k in \mathbf{R} , la matrice A_k sia la matrice associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare L da \mathbf{R}^3 a \mathbf{R}^3 .

Determinare, al variare di k in \mathbf{R} , la dimensione, un insieme di equazioni, e una base sia per l'immagine di L che per il nucleo di L .

(c) Sia k_0 il valore di k per cui A_k risulta non invertibile.

Per quest'unico valore particolare k_0 determinare autovalori, autovettori e, se possibile, una matrice diagonalizzante e una forma diagonale per A_{k_0} .

È possibile diagonalizzare A_{k_0} mediante una matrice ortogonale?

- (2) In \mathbf{R}^3 , si considerino le rette r_1 di equazione

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

r_2 di equazione

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

ed r_3 di equazione

$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare la posizione relativa fra:

- (a) r_1 ed r_2 .
- (b) r_1 ed r_3 .
- (c) r_2 ed r_3 .

- (3) (a) Si consideri in \mathbf{R}^5 il sottoinsieme $\Sigma = \{(x, y, z, v, w) \mid \text{esistono } s, t \in \mathbf{R} \text{ tali che } x + y + z + v + w = t, x - y + z - v - w = s + 1 \text{ e } z = t + s\}$.

- (a₁) Cosa rappresenta Σ ?
- (a₂) Σ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^5 ?
- (a₃) Σ è un'iperquadrica in \mathbf{R}^5 ?

(b) Si consideri in \mathbf{R}^5 il sottoinsieme $\Sigma = \{(x, y, z, v, w) \mid \text{esistono } s, t \in \mathbf{R} \text{ tali che } x^2 = t, y^2 = s \text{ e } 1 = t + s\}$.

- (b₁) Cosa rappresenta Σ ?
- (b₂) Σ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^5 ?
- (b₃) Σ è un'iperquadrica in \mathbf{R}^5 ?