Facoltà di Ingegneria
Geometria ingegneria medica . Esame (27/02/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato** Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione A

1) DOMANDA FILTRO punti 6 Completare la frase seguente

Sia A una matrice $m \times n$ di rango r a coefficienti reali e sia b un vettore colonna di $\mathbb{R}^m$, sia A' la matrice $(m+1) \times n$ che ha per colonne ordinate le colonne ordinate di A e il vettore b, allora il sistema lineare $AX = b$ e' compatibile se e solo se... Nel caso il sistema sia compatibile la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni e'... (La domanda filtro si compone di tutte e due le domande).
Soluzione

Il sistema e' compatibile se e solo se il rango di A' coincide con il rango di A che e' r. Se il sistema e' compatibile la dimensione dello spazio delle sue soluzioni e'

$$n - r = \text{numero di incognite del sistema - rango di } A.$$

2) Esercizio 2. Punti 14

Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \\ 3x+2y \end{pmatrix}$$

Sia **e** la base canonica di $\mathbb{R}^2$, e sia **f** la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia **c** la coppia di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sia **d** la terna di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Provare che **c** e **d** sono basi di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ rispettivamente

Determinare la matrice associata ad L rispetto alla coppia di basi **e** in partenza ed **f** in arrivo

Determinare la matrice associata ad L rispetto alla coppia di basi **c** in partenza ed **d** in arrivo

Determinare una base del nucleo di L ed una base dell immagine di L.

Soluzione I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono non nulli e non proporzionali ed essendo due vettori di $\mathbb{R}^2$ ne formano una base, in altri termini $det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$ quindi i due vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$. Similmente $det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$ quindi i suoi vettori colonna formano una base di $\mathbb{R}^3$. In generale se $L : V \to W$ e' una applicazione lineare, se $\mathbf{b} = v_1 \dots v_n$ e' una base di V e $\mathbf{c} = w_1 \dots w_m$ e' una base di W, allora la matrice $M_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}$ associata all'applicazione lineare rispetto a questa coppia di basi si costruisce nel modo seguente: Si prende v_1 primo vettore della base di partenza $\mathbf{b}$, si considera $L(v_1)$ e si scrive $L(v_1)$ come combinazione lineare dei vettori della base di arrivo $\mathbf{c}$, i coefficienti di questa combinazione lineare saranno la prima colonna della matrice associata, poi si prende il secondo vettore v_2 della base $\mathbf{b}$ si considera $L(v_2)$ e lo si scrive come combinazione lineare dei vettori della base $\mathbf{c}$, i coefficienti di questa combinazione lineare formano il secondo vettore colonna della matrice associata, poi si considera il terzo vettore v_3 della base $\mathbf{b}$ ecc... Nel nostro caso particolare se $\mathbf{e} = e_1, e_2$ ed $\mathbf{f} = f_1, f_2, f_3$ sono le basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ rispettivamente, allora $L(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1f_1 + 2f_2 + 3f_3$, $L(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1f_1 + 1f_2 + 2f_3$, quindi

$$M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{e}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Facendo l'eliminazione di Gauss si vede che questa matrice ha rango 2 percio' le sue colonne sono linearmente indipendenti e sono una base di $ImmL$, inoltre dalla formula $dimKerL + dimImmL =$ dimensione dello spazio di partenza, quindi nel nostro caso, $dimKerL + dimImmL = 2$ si vede che $KerL = 0$. Calcoliamo ora la matrice associata ad L rispetto alle basi $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$. Il primo vettore della base $\mathbf{c}$ e' $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Risolviamo ora il sistema lineare $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ si trova $x = 2, y = 0, z = 1$. In modo simile il secondo vettore della base $\mathbf{c}$ e' $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $L \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Risolviamo il sistema lineare $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ si trova $x = 4, y = -1, z = 1$. In conclusione abbiamo

$$M_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}(L) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In alternativa si potrebbe usare la formula $M_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}(L) = M_{\mathbf{d}}^{\mathbf{f}}(Id_{\mathbb{R}^3}) M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{e}}(L) M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{c}}(Id_{\mathbb{R}^2})$ Osservando che $(M_{\mathbf{d}}^{\mathbf{f}}(Id_{\mathbb{R}^3})) = (M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{d}}(Id_{\mathbb{R}^3}))^{-1}$ e che $(M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{d}}(Id_{\mathbb{R}^3})) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. mentre $(M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{c}}(Id_{\mathbb{R}^2})) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3 Esercizio 3 punti 5

Determinare una forma canonica affine della conica $x^2 + y^2 + 2xy + 2y = 0$ Soluzione

La matrice completa della conica e' $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. e la matrice della parte quadratica e' $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si ha $det(A^*) = -2 \neq 0$ e la conica e' non degenere, d'altra parte $det(A) = 0$ quindi la conica e' una parabola la cui forma canonica affine e' $x^2 - y = 0$. Avremmo potuto anche ricavare una forma canonica metrica e poi la corrispondente forma canonica affine, oppure avremmo potuto utilizzare l'algoritmo di Gauss Lagrange per ricavare direttamente una forma cononica affine

4) Domanda delicata punti 6

Siano r_1 ed r_2 due rette in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, (cio' due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ di dimensione 1). Provare che esiste sempre un sottospazio affine Σ di dimensione compresa tra 1 e 3 che contiene entrambe le rette. (Suggerimento si considerino equazioni parametriche di r_1 ed r_2 e se P e' un punto di r_1 e Q e' un punto di r_2 si consideri anche il vettore differenza $P - Q$). Soluzione

Scriviamo la retta r_1 nella forma $X = tv_1 + P$ e la retta r_2 nella forma $X = sv_2 + Q$. Un sottospazio affine Σ che contiene tutte e due le rette deve essere della forma $V + P$ con V sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Infatti dato che $P \in r_1$ deve essere $P \in \Sigma$. Se Σ contiene r_1 il sottospazio V dovra' contenere v_1 e similmente se Σ contiene r_2 il sottospazio V dovra' contenere v_2. In fine dato che $Q \in \Sigma$ allora $Q = u + P$ per qualche $u \in V$ cioe' $Q - P \in V$. Quindi V contiene $span(v_1, v_2, Q - P)$. D'altra parte se prendiamo come V proprio $span(v_1, v_2, Q - P)$ allora $V + P$ contiene $span(v_1) + P$ cioe' r_1 e contiene $span(v_2) + (Q - P) + P = span(v_2) + Q$ cioe' r_2. Ma ora dato che ad esempio $v_1 \neq 0$ il sottospazio vettoriale $span(v_1, v_2, Q - P)$ non puo' essere zero quindi, puo' avere dimensione $1, 2,$ oppure 3.