24-02-2021B.

In questo compito in ogni esercizio ci sono 2 risposte giuste e due sbagliate, ogni risposta giusta vale + 3, ogni risposta sbagliata -3, ogni risposta non data 0.**B1**Si consideri una base β dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico, e sia β_1 una ortonormalizzata di Gram-Schmidt di β. Sia $A = M^{\beta}_{\beta_1}(Id_{\mathbb{R}^n})$. (Base β_1 in partenza β in arrivo). Quale tra le seguenti sono affermazioni corrette per qualunque base β. ?

(1) (a) A e' una matrice triangolare superiore (50%)
(b) A e' una matrice triangolare inferiore (-50%)
(c) Il determinante di A e' maggiore di zero (50%)
(d) A e' una matrice simmetrica. (-50%)

(2) **B2**
Siano Σ_1 e Σ_2 due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Sia Σ_3 il piu' piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ che contiene sia Σ_1 che Σ_2, Quali tra le seguenti affermazioni e' sempre corretta ?
(a) La giacitura di Σ_3 contiene la somma delle giaciture di Σ_1 e di Σ_2. (50%)
(b) La somma delle giaciture di Σ_1 e Σ_2 contiene la giacitura di Σ_3. (-50%)
(c) La giacitura di Σ_3 e' uguale alla somma delle giaciture di Σ_1 e Σ_2. (-50%)
(d) Se $dim(\Sigma_1) + dim(\Sigma_2) > n$ allora le giacitura hanno intersezione che non e' il solo vettore nullo. (50%)

(3) **B3**
Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare, sia

$$\beta = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

una base di $\mathbb{R}^3$. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che A sia la matrice che rappresenta L rispetto alle basi β in partenza e β in arrivo. Quale tra le seguenti affermazioni e' corretta ?
(a) L'immagine di L ha dimensione 2 (50%)
(b) Il nucleo di L contiene il vettore

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(-50%)
(c)

$$< L \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >= 9$$

(qui $< >$ indica il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^3$). (-50%)

(d)

$$L\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=0$$

(qui $\wedge$ indica il prodotto vettoriale). (50%)

(4) **B4**
Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo, dove A e' una matrice $m \times n$ a coefficienti reali, si consideri su $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare canonico, sia V lo spazio delle soluzioni del sistema. Sia $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, l'applicazione lineare date da $L_A(X) = AX$. Quali tra le seguenti affermazioni sono sempre vera:
(a) $V^\perp$ e' generato dalle righe di A, (50%)
(b) $V^\perp$ e' generato dalle colonne di A (-50%)
(c) $V^\perp + KerL_A = \mathbb{R}^n$ (50%)
(d) $V^\perp + ImmL_A = \mathbb{R}^n$ (-50%)

(5) **B5**
Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una isometria lineare, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?
(a) Non esiste nessuna isometria lineare come sopra tale che $L(v_1) = w_1$, (-50%)
(b) Esiste una ed una sola isometria lineare come sopra tale che $L(v_1) = w_1$, (-50%)
(c) Esiste un numero finito maggiore di uno di isometrie lineari come sopra tale che $L(v_1) = w_1$, (50%)
(d) Esistono infinite applicazioni lineari L di rango 1 da $\mathbb{R}^2$ in se', non necessariamente isometrie, tali che $L(v_1) = w_1$. (50%)

SOLUZIONI B 1 Per come e' costruita la ortonormalizzazione di Gramn-Schmidt Risposta 1 OK, Risposta 2 No, Risposta 3 OK infatti ortogonalizzando si ottiene una matrice con 1 sulla diagonale, e ortonormalizzando gli elementi sulla diagonale vengono moltiplicati per numeri positivi quindi dato che la matrice e' triangolare superiore il determinante e' posiitvo. Risposta 4 No.

B 2

Sia V giacitura di Σ_1 W giacitura di Σ_2 e T giacitura di Σ_3, allora T contiene sia V che W quindi risposta 1 OK, risposta 2 No esempio una retta Σ_1 in $\mathbb{R}^2$ e un punto Σ_2 che non appartiene alla retta. In questo caso $W = \{0\}$ e $V + W = V$ mentre T e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ che contiene sia V che un traslato del punto Σ_2 che non appartiene a V, quindi T un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ che contiene la retta V e non e' V, quindi $T = \mathbb{R}^2$. risposta 3 No per lo stesso motivo per cui risposta 2 No, risposta 4 Ok per la formula di Grassmann.

B 3

Risposta 1 OK il rango di A e' 2. Risposta 2 No (il vettore sarebbe nel nucleo se A fosse la matrice associata ad L rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$, mentre lo e' rispetto alla base β. Risposta 3 no, risposta 4 OK

B 4 Per la definizione del prodotto scalare canonico, di prodotto di una matrice per un vettore colonna e di spazio ortogonale la 1 e' OK e $KerL_A = V$ quindi 3 OK 2 No e 4 No

B 5

$||v_1|| = ||w_1||$ quindi una isometria lineare che mandi v_1 in w_1 esiste (ad esempio una rotazione) ma non e' unica. Se infatti v_2 e' ortogonale a v_1 con $||v_2|| = ||v_1||$ potrei ruotare la base v_1, v_2 portando v_1 su w_1 e v_2 su un vettore w_2. e questa e' una isometria come vogliamo, ma potrei anche dopo aver ruotato applicare un ribaltamento che lasci fisso w_1 quindi le isometrie sono 2. Quindi 1 No 2 No 3 OK 4 OK infatti per ogni vettore v tale che v e v_1 sono linearmente indipendenti possiamo definire una applicazione lineare di rango 1 L_v tale che $L_v(v_1) = w_1$, $L_v(v) = 0$, e ci sono infiniti vettori v non proporzionali con v_1.