

Prova scritta di Geometria-Ingegneria Medica-Trapani-21-02-2019-C1

Cognome Nome e numero di matricola dello studente

Esercizio 1. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Determinare una matrice ortogonale N ed una matrice diagonale D tali che $N^{-1}AN = D$.
Si noti che -3 è un autovalore di A . SVOLGIMENTO

21-02-19
SOLUZIONI DEL CONTO DI GEOMETRIA
PER INGEGNERIA MEDICA (TRAPANI) 21-02-19 C.

Esercizio 1

CALCOLIAMO GLI AUTOVALORI

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -2-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = (-2-\lambda)((-2-\lambda)(6-\lambda) - 9) - (6-\lambda-9) + 3(3 - 3(-2-\lambda)) =$$

$$(-2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 21) + 10\lambda + 30 = (\lambda+3)((-1-2)(1-3) + 10)$$

$$= (\lambda+3)(-\lambda^2 + 5\lambda + 24) = (\lambda+3)^2(\lambda-1). \text{ GLI AUTOVALORI}$$

SONO 3, 3, 8. DATO CHE A È SIMMETRICA REALE LA

MULTPLICITÀ ALGEBRICA È LA MULTPLICITÀ GEOMETRICA

COINCIDENTE.

$$V_8 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} -10x + y + 3z = 0 \\ -7x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y = 10x - 3z \\ -7x - 2(10x - 3z) + 3z = 0 \\ z = 3x \\ y = x \end{cases}$$

base di V_8 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. DATO CHE LA MATRICE È

SIMMETRICA REALE $V_{-3} = V_8^b = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + 3z = 0 \right\}$

base di V_3 $y=0, z=1$ $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $y=1, z=0$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

base di $V_3 = \{v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ v_1, v_2

NON SONO PERPENDICOLARI DEVONO ESSERE ORTOGONALIZZATI
CON GRAM-SCHMIDT $w_1 = v_1$ $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$ cioè

$$w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

21-2-19

C-2

O R S NORMALIZAZIONE OTTENSIBILI

$$U_1 = \frac{W_1}{|W_1|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad U_2 = \frac{W_2}{|W_2|} = \frac{1}{\sqrt{59}} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$U_3 = \frac{V_3}{|V_3|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$N = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{59}} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$E \cdot D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~

Prova scritta di Geometria-Ingegneria Medica-Trapani-21-02-2019-C2

Cognome Nome e numero di matricola dello studente

Esercizio 2. Siano dati nello spazio $\mathbf{R}^3$ i punti P di coordinate $(1, 3, 1)$, Q di coordinate $(0, 4, 1)$ ed R di coordinate $(1, 1, 2)$. a) Determinare una equazione cartesiana del piano Π contenente i tre punti. b) Determinare una equazione parametrica della retta r passante per P e Q c) Determinare una equazione cartesiana della retta r_1 contenuta in Π passante per R e perpendicolare ad r . SVOLGIMENTO

Esercizio 2

π ha equazione parametrica: con $X = t(P-Q) + s(R-Q) + Q$,

$$P-Q = (1; -1; 0); \quad R-Q = (0; 2; -1). \quad \text{cioè}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Il sistema associato di}$$

incognite t, s ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x-1 \\ -1 & 2 & | & y-3 \\ 0 & -1 & | & z-1 \end{pmatrix}$.

Riducendo con Gauss si trova $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x-1 \\ -1 & 2 & | & y-3 \\ 0 & -1 & | & z-1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x-1 \\ 0 & -1 & | & z-1 \\ -1 & 2 & | & y-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x-1 \\ 0 & -1 & | & z-1 \\ 0 & 2 & | & x+y-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x-1 \\ 0 & -1 & | & z-1 \\ 0 & 0 & | & x+y+2z-6 \end{pmatrix}.$$

Una equazione cartesiana di π è $x+y+2z-6=0$.

La retta π passante per $P \in \pi$ ha equazione

parametrica $X = t(P-Q) + Q$ cioè $X = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il fascio di piani perpendicolari ad π ha equazione

$$\pi_d: x-y+d=0. \quad \text{Il piano contenente } R \text{ e } \pi_1 \text{ ha}$$

equazione $x-y=0$. La retta π_1 essendo

passante per R e perpendicolare ad π deve

essere contenuta in π , ma anche contenuta

in π_1 . Quindi equazioni cartesiane della retta

$$\pi_1 \text{ sono } \begin{cases} x-y=0 \\ x+y+2z-6=0 \end{cases}$$

Prova scritta di Geometria-Ingegneria Medica-Trapani-21-
02-2019-C3

Cognome Nome e numero di matricola dello studente

Esercizio 3. Sia $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare $L(X) = AX$ con A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia $\beta = \{(2, 1), (2, 3)\}$ e $\beta_1 = \{(1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 3)\}$. Provare che β e' una base di $\mathbf{R}^2$ e β_1 e' una base di $\mathbf{R}^3$ e determinare la matrice associata ad L rispetto alle basi β e β_1 .
Calcolare le coordinate del vettore $L((4, 4))$ nella base β_1 .

SVOLGIMENTO

Esercizio 3

$$L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 4 \neq 0, \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0.$$

$$\mathcal{B}, \mathcal{B}_1 \text{ sono basi.}$$

$$L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \gamma \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma \end{pmatrix}$$

$$L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' + \beta' + \gamma' \\ \gamma' \\ \alpha' + 2\beta' + 3\gamma' \end{pmatrix}$$

$$\gamma = 5, \alpha + \beta = -1, \alpha + 2\beta = -9, \beta = -\alpha - 1$$

$$\alpha - 2\alpha - 2 = -9, \alpha = 7, \beta = -8$$

$$\gamma' = 7, \alpha' + \beta' = 1, \alpha' = 1 - \beta', 1 - \beta' + 2\beta' + 21 = 10$$

$$22 + \beta' = 10, \beta' = -12, \alpha' = 13, M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -8 & -12 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{ quindi } \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ha coordinate } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{in base } \mathcal{B}, \text{ perciò } L\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \text{ ha coordinate}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -8 & -12 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ in base } \mathcal{B}_1$$