Prova scritta di Geometria-Ingegneria Medica-Trapani-21-02-2019-B1

Cognome Nome e numero di matricola dello studente

Esercizio 1. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare una matrice ortogonale N ed una matrice diagonale D tali che $N^{-1}AN = D$. Si noti che 2 e' un autovalore di A. SVOLGIMENTO

CORREZIONE DEL COMPITO DI GEOMETRIA PER INGEGNERIA MEDICA (TRAPANI) B

$+ \circ$ 21-02-19

ESERCIZIO 1

DOBBIAMO PRIMA TROVARE GLI AUTOVALORI

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\left((3-\lambda)(6-\lambda)-4\right) =$$

$$(2-\lambda)\det\left(\lambda^2-9\lambda+14\right) = (2-\lambda)^2(7-\lambda)$$

GLI AUTOVALORI SONO 2 DI MOLTEPLICITÀ 2 E 7 DI MOLTEPLICITÀ 1. DATO CHE LA MATRICE A È SIMMETRICA REALE, LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA COINCIDONO

$$V_7 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} -4x+2y=0 \\ 2x-y=0 \\ -6z=0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} z=0 \\ y=2x \end{array} \Bigg\} \text{ base } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DATO CHE A È SIMMETRICA $V_2 = V_7^{\perp} \Rightarrow V_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x+2y=0\right\}$

~~base~~ PARAMETRI LIBERI y, z. $y=1, z=0$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y=0, z=1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. I VETTORI $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ SONO TRA LORO PERPENDICOLARI.

PERCIÒ $u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{v_1}{\sqrt{5}}$; $u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = v_2$; $u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{v_3}{\sqrt{5}}$

SONO UNA BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI DI A.

PERCIÒ $N = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Prova scritta di Geometria-Ingegneria Medica-Trapani-21-02-2019-B2

Cognome Nome e numero di matricola dello studente

Esercizio 2. Siano dati nello spazio $\mathbf{R}^3$ i punti P di coordinate $(2, 1, 2)$, Q di coordinate $(1, 2, 1)$ ed R di coordinate $(3, 0, 1)$. a) Determinare una equazione cartesiana del piano Π contenente i tre punti. b) Determinare una equazione parametrica della retta r passante per P e Q c) Determinare una equazione cartesiana della retta r_1 contenuta in Π passante per R e perpendicolare ad r. SVOLGIMENTO

2 B 21-2-19

Esercizio 2

Il piano π ha equazione cartesiana
$X = t(P-Q) + s(R-Q) + Q$. $(P-Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $R-Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il corrispondente sistema in incognite $s; t$ ha matrice $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x-2 \\ -1 & -1 & y-1 \\ 1 & -1 & z-2 \end{array}\right)$

Applicando Gauss troviamo $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x-2 \\ -1 & -1 & y-1 \\ 1 & -1 & z-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & x-2 \\ 0 & 0 & x+y-3 \\ 0 & -2 & z-x \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x-2 \\ 0 & -2 & z-x \\ 0 & 0 & x+y-3 \end{pmatrix}$. Una equazione cartesiana del piano è

$x+y-3=0$. Equazione parametrica di r è
$X = t(P-Q) + Q = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il fascio di piani ortogonali ad r è $\pi_d = x-y+z+d=0$
Il piano del fascio passante per R è π_{-4} cioè
$x-y+z-4=0$. Dato che r_1 è perpendicolare ad r ed è contenuta in π, equazioni cartesiane di r_1 sono $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$

Prova scritta di Geometria-Ingegneria Medica-Trapani-21-02-2019-B3

Cognome Nome e numero di matricola dello studente

Esercizio 3. Sia$L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare $L(X) = AX$ con A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sia $\beta = \{(1,2),(2,1)\}$ e $\beta_1 = \{(1,1,3),(0,1,1),(0,1,2)\}$. Provare che β e' una base di $\mathbf{R}^2$ e β_1 e' una base di $\mathbf{R}^3$ e determinare la matrice associata ad L rispetto alle basi β e β_1. Calcolare le coordinate del vettore $L((3,3))$ nella base β_1.

SVOLGIMENTO

3 B   21-2-19

Esercizio 3

$$\det\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} = -3 \neq 0,\quad \det\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\3&1&2\end{pmatrix} = 1\det\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Quindi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi. $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+y\\y\\x+3y\end{pmatrix}$.

$L\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}$; $L\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}$. Quindi bisogna

risolvere i sistemi $\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=4\\ \beta+\gamma=2\\ \beta+2\gamma=7\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha'+\beta'+3\gamma'=5\\ \beta'+\gamma'=1\\ \beta'+2\gamma'=5\end{cases}$

Troviamo $\gamma=5$, $\beta=-3$ $\alpha=-8$
$\gamma'=4$ $\beta'=-3$, $\alpha'=-4$

$$M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(L) = \begin{pmatrix}-8&-4\\-3&-3\\5&4\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ quindi $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ ha coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}_1$

perciò $L\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\\12\end{pmatrix}$ ha coordinate

$$\begin{pmatrix}-8&-4\\-3&-3\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-6\\9\end{pmatrix}$$ nella base $\mathcal{B}_2$