Prova scritta di Geometria-Ingegneria Medica-Trapani-21-02-2019-A1

Cognome Nome e numero di matricola dello studente

Esercizio 1. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Determinare una matrice ortogonale N ed una matrice diagonale D tali che $N^{-1}AN = D$. Si noti che -1 e' un autovalore di A. SVOLGIMENTO

1 A 21-2-19

SOLUZIONI DEL COMPITO DI GEOMETRIA INGEGNERIA MEDICA (TRAPANI) 21-2-2019

COMPITO A

ESERCIZIO 1

PER TROVARE LA MATRICE N DEVO TROVARE GLI AUTOVALORI E GLI AUTOVETTORI DELLA MATRICE SIMMETRICA REALE A.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 8-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left((3-\lambda)(8-\lambda)-36\right)$$

$$-2\left(2(8-\lambda)-18\right)$$

$$+3\left(12-3(3-\lambda)\right) = -\lambda\left(\lambda^2-11\lambda-12\right)$$

$$+4\lambda+4+9+9\lambda =$$

$$(\lambda+1)\left(-\lambda(\lambda-12)+13\right) = -(\lambda+1)^2(\lambda-13)$$

GLI AUTOVALORI SONO QUINDI 1 DI MOLTEPLICITÀ 2 E 13 DI MOLTEPLICITÀ 1. NOTIAMO CHE ESSENDO LA MATRICE SIMMETRICA REALE LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA COINCIDE CON QUELLA GEOMETRICA. CALCOLIAMO V_{-1}

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} +x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+6y+9z \end{array} \right\}. \text{ QUINDI}$$

$V_{-1} = \{x+2y+3z=0\}$ y, z PARAMETRI LIBERI

$$\begin{array}{l} y=1,\ z=0 \\ y=0\ \ z=1 \end{array} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

QUESTI VETTORI NON SONO PERÒ ORTOGONALI.

2A 21-2-19

Continuazione soluzione esercizio 1A.

Una base di V_{13} deve essere ortogonale a V_1

Posso quindi prendere il prodotto vettoriale

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i & j & k\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix} = i\cdot 1 - j(-2) + k(-3)$$

Una base di V_{13} è $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = w_3$. ~~Questi~~ Tuttavia

i vettori $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ non sono ortogonali.

Posto $v_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $v_2 = -\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ li ortogonalizzo

con Gram Schmidt e trovo $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$.

Infine trovo $u_1 = \dfrac{w_1}{|w_1|}$; $u_2 = \dfrac{w_2}{|w_2|}$; $u_3 = \dfrac{w_3}{|w_3|}$.

Cioè $w_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

$w_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2; v_1\rangle}{\langle v_1; v_1\rangle} v_1 = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{6}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$$

$u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$. La matrice N ha per

colonne u_1, u_2, u_3 quindi $N = \dfrac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-2\sqrt{14} & -3 & \sqrt{5}\\ \sqrt{14} & -6 & 2\sqrt{5}\\ 0 & -5 & 3\sqrt{5}\end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 13\end{pmatrix}$, $N^{-1}AN = D$.

Prova scritta di Geometria-Ingegneria Medica-Trapani-21-02-2019-A2

Cognome Nome e numero di matricola dello studente

Esercizio 2. Siano dati nello spazio $\mathbf{R}^3$ i punti P di coordinate $(1,1,1)$, Q di coordinate $(0,1,2)$ ed R di coordinate $(1,0,1)$. a) Determinare una equazione cartesiana del piano Π contenente i tre punti. b) Determinare una equazione parametrica della retta r passante per P e Q c) Determinare una equazione cartesiana della retta r_1 contenuta in Π passante per R e perpendicolare ad r. SVOLGIMENTO

3-A-21-2-19

ESERCIZIO 2

UNA EQUAZIONE PARAMETRICA DEL PIANO π È

$X = t(P-R)+s(Q-R)+R$ cioè

$P-R = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $Q-R = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

QUINDI VIENE $X = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

LA MATRICE DEL CORRISPONDENTE SISTEMA IN INCOGNITE t, s È $\begin{pmatrix}0 & -1 & x-1\\1 & 1 & y\\0 & 1 & z-1\end{pmatrix}$. RIDUCENDO CON GAUSS SI OTTIENE

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & x-1\\1 & 1 & y\\0 & 1 & z-1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & y\\0 & -1 & x-1\\0 & 1 & z-1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & y\\0 & 1 & x-1\\0 & 0 & z+x-2\end{pmatrix}.$$

UNA EQUAZIONE CARTESIANA DI π È $x+z-2=0$

r HA EQUAZIONE PARAMETRICA $X = t(P-Q)+Q$.

$P-Q = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. UNA EQUAZIONE PARAMETRICA DI r È $X = t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

COMINCIAMO CON IL DETERMINARE IL PIANO π_1 PERPENDICOLARE AD r E PASSANTE PER R. IL FASCIO DI PIANI PERPENDICOLARI AD r HA EQUAZIONE $x-z+d=0$, IMPONENDO IL PASSAGGIO PER R SI OTTIENE $d=0$, π_1 HA QUINDI EQUAZIONE $x-z=0$. LA RETTA $r_1 \subseteq \pi_1$ ED ANCHE $r_1 \subseteq \pi$ QUINDI UNA EQUAZIONE CARTESIANA DI r_1 È

$$\begin{cases} x-z=0 \\ x+z-2=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z=x \\ 2x-2=0 \end{matrix} \Rightarrow x=1 \quad z=1$$

UNA EQUAZIONE CARTESIANA DI r_1 È $\begin{pmatrix}x\\y\\ \dots\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}0\\1\\ \dots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Prova scritta di Geometria-Ingegneria Medica-Trapani-21-02-2019-A3

Cognome Nome e numero di matricola dello studente

Esercizio 3. Sia$L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare $L(X) = AX$ con A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia $\beta = \{(1,1),(1,3)\}$ e $\beta_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,2)\}$. Provare che β e' una base di $\mathbf{R}^2$ e β_1 e' una base di $\mathbf{R}^3$ e determinare la matrice associata ad L rispetto alle basi β e β_1. Calcolare le coordinate del vettore $L((2,4))$ nella base β_1.

SVOLGIMENTO

4 - A 21-2-19

Esercizio 3

$\det\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix} = 3-1 = 2 \neq 0$, $\det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix} = 1\cdot 2 = 2 \neq$

Quindi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi.

$$L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Cioè $\begin{cases}\alpha+\gamma=1\\ \beta+\gamma=2\\ 2\gamma=3\end{cases} \Rightarrow \alpha = -1/2,\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = 3/2$

$$L\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \alpha'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta'\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma'\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}\alpha'+\gamma'=3\\ \beta'+\gamma'=4\\ 2\gamma'=7\end{cases}$ $\gamma' = 7/2$ $\alpha' = -\frac{1}{2}$ $\beta' = \frac{1}{2}$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L) = \begin{pmatrix}-1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2\\ 3/2 & 7/2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

Quindi il vettore $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ ha coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$. Perciò $L\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ ha coordinate

$$\begin{pmatrix}-1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2\\ 3/2 & 7/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$$ nella base $\mathcal{B}'$