Facoltà di Ingegneria
Geometria. Esame (18/09/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda**

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione B

1) DOMANDA FILTRO punti 6 Se A e' una matrice $m \times n$ con $n \neq m$, si supponga A di rango n allora Una sola delle affermazioni seguenti e' quella giusta, quale ?

$m < n$ e l'applicazione lineare $L_A(X) = AX$ e' iniettiva
$m < n$ e l'applicazione lineare $L_A(X) = AX$ e' suriettiva
$m > n$ e l'applicazione lineare $L_A(X) = AX$ e' iniettiva
$m > n$ e l'applicazione lineare $L_A(X) = AX$ e' suriettiva

Soluzione L'applicazione $L_A(X) = AX$ e' una applicazione lineare da R^n ad $\mathbb{R}^m$, il rango di A e' la dimensione dell'immagine di L_A quindi l'immagine di L_A che e' contenuta in $\mathbb{R}^m$ e' un sottospazio vettoriale di dimensione n, quindi $n \leq m$, dato che per ipotesi $m \neq n$ si ha $n < m$. Inoltre $dimImmL_A + dimKerL_A = n$, quindi $dimKerL_A = 0$, da cui $KerL_A = 0$ ed L_A e' iniettiva, la risposta giusta e' la terza.

Esercizio 2. Punti 9 Si consideri la retta r in $\mathbb{R}^3$ con equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ x - y - 5z = 3 \end{cases}$ e sia p il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ calcolare la distanza di p da r. Soluzione La strategia e' la seguente, si cerca il piano Π ortogonale ad r passante per p, (infatti in $\mathbb{R}^3$ l'ortogonale ad una retta e' un piano) si determina il punto q di intersezione tra r e Π, allora si ha che la distanza tra p ed r coincide con la distanza tra p e q. Inoltre se una equazione parametrica della retta r e'

$$\begin{cases} x = at + a_1 \\ y = bt + b_1 \\ z = ct + c_1 \end{cases}$$

allora una equazione cartesiana di un piano perpendicolare ad r e' $ax + by + cz + d = 0$ per opportuno d che possiamo determinare imponendo il passaggio per il punto p. Piu' specificatamente nel caso del presente esercizio abbiamo: Con la riduzione di Gauss l'equazione cartesiana della retta diventa $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ -5y - 8z = 5 \end{cases}$ Scegliendo z come parametro libero e ponendolo uguale a zero si trova che il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene ad r, inoltre se consideriamo il sistema omogeneo associato $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ -5y - 8z = 0 \end{cases}$ e poniamo il parametro libero z uguale ad 1 troviamo che il vettore $\begin{pmatrix} 17/5 \\ -8/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

e' base della retta parallela ad r che passa per zero, ovvero e' un vettore direttore di r. Se per semplicit' moltiplichiamo per 5 il vettore direttore troviamo che una equazione parametrica di r e'

$$\begin{cases} x = 17t + 2 \\ y = -8t - 1 \\ z = 5t \end{cases}$$

Quindi un piano ortogonale ad r ha equazione cartesiana della forma $17x - 8y + 5z + d = 0$, e imponendo il passaggio per il punto p troviamo il piano Π di equazione $17x - 8y + 5z - 61 = 0$. Per trovare il punto q di intersezione tra Π ed r si pu' scrivere il sistema in tre equazioni e tre incognite e risolverlo o pi' semplicemente sostituire le variabili nell'equazione parametrica di r all'interno dell'equazione cartesiana di Π, ricavare t e poi trovare il punto, nel nostro caso troviamo $17(17t - 2) - 8(-8t - 1) + 5(5t) - 61 = 0$, cio' $t = 379/87$ da questo si ricavano le coordinate del punto q. Da queste in fine la distanza tra p ed r che e' la distanza tra p e q.

Esercizio 3. Punti 9 Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $L(X) = AX$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si considerino le coppie di vettori $\beta = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ e $\beta' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Provare che β e β' sono basi in $\mathbb{R}^2$ e determinare la matrice associata ad L rispetto alla base β in partenza e β' in arrivo. Calcolare nucleo e immagine di L. Soluzione

Prima di tutto A e' una matrice quadrata non zero con $det(A) = 0$, da questo si ricava subito che ha ha rango 1 quindi l'immagine di L_A e' generata ad esempio dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Inoltre sappiamo che il nucleo ha dimensione 1 ed e' l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases}$ Il nucleo e' quindi generato dal vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poi $det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}). \neq 0$ e $det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}). \neq 0$ quindi β e β' sono basi. Ancora $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 38 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ Risolvendo il corrispondente sistema lineare ricaviamo $x = 4$ $y = 3$. Similmente $L(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Risolvendo il corrispondente sistema lineare ricaviamo $x' = 44/19$ $y' = 33/19$. La matrice associata e' quindi

$$M^{\beta}_{\beta'}(L) = \begin{pmatrix} 4 & 44/19 \\ 3 & 33/19 \end{pmatrix}.$$

In alternativa

$$M^{\beta}_{\beta'}(L) = M^{e}_{\beta'}(Id)M^{e}_{e}(L)M^{\beta}_{e}(Id)$$

dove e e' la base canonica di $\mathbb{R}^2$, $M^e_e(L) = A$ mentre $M^{\beta}_{e}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ e $M^{e}_{\beta'}(Id) = (M^{\beta'}_{e}(Id))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

4) Domanda delicata punti 6 Un teorema fatto nel corso afferma che se V e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ tali che $V + W = \mathbb{R}^n$, e $V \cap W = 0$ allora $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Dare un esempio di tre sottospazi vetturali V_1, V_2, V_3 di $\mathbb{R}^2$ tali che $V_1 + V_2 + V_3 = \mathbb{R}^2$, $V_i \cap V_j = 0$ per ogni coppia di indici i e j tali che i diverso da j con i e j tra 1 e 3 ma $\mathbb{R}^2$ non e' somma diretta di V_1, V_2, V_3. Soluzione

Siano V_1, V_2 V_3 tre rette distinte per l'origine in $\mathbb{R}^2$. Ad esempio V_1 sia la retta generata dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, V_2 sia la retta generata dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e V_3 sia la retta generata dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dato che le rette sono distinte e passano per zero l'intersezione di due qualunque di loro e' il solo zero. D'altra parte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$, da questo si deduce che $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$ ed a maggior ragione $V_1 + V_2 + V_3 = \mathbb{R}^2$. D'altra parte

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi la somma non e' diretta.