Facoltà di Ingegneria
Geometria. Esame (02/9/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda**

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione A

1) DOMANDA FILTRO punti 6 Sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, siano $v_1, \dots v_k$ vettori di V, si dice che $v_1, \dots v_k$ sono generatori di V se...

Soluzione I vettori $v_1, \dots, v_k$ si dicono generatori del sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^n$ se appartengono a V e se ogni vettore v di V si puo' scrivere come combinazione lineare di $v_1, \dots v_k$. Cioe' se per ogni vettore v in V esistono numeri reali $\alpha_1, \dots \alpha_k$ tali che $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_k v_k$.

Esercizio 2. Punti 9 Si consideri la retta r in $\mathbb{R}^3$ con equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$ e sia p il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ calcolare la distanza di p da r. Soluzione La strategia e' la seguente, si cerca il piano Π ortogonale ad r passante per p, (infatti in $\mathbb{R}^3$ l'ortogonale ad una retta e' un piano) si determina il punto q di intersezione tra r e Π, allora si ha che la distanza tra p ed r coincide con la distanza tra p e q. Inoltre se una equazione parametrica della retta r e'

$$\begin{cases} x = at + a_1 \\ y = bt + b_1 \\ z = ct + c_1 \end{cases}$$

allora una equazione cartesiana di un piano perpendicolare ad r e' $ax+by+cz+d=0$ per opportuno d che possiamo determinare imponendo il passaggio per il punto p. Piu' specificatamente nel caso del presente esercizio abbiamo: Con la riduzione di Gauss l'equazione cartesiana della retta diventa $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -4y+4z=0 \end{cases}$ Scegliendo z come parametro libero e ponendolo uguale a zero si trova che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene ad r, inoltre se consideriamo il sistema omogeneo associato $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -4y+4z=0 \end{cases}$ e poniamo il parametro libero z uguale ad 1 troviamo che il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' base della retta parallela ad r che passa per zero, ovvero e' un vettore direttore di r, in altri termini una equazione parametrica di r e'

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi un piano ortogonale ad r ha equazione cartesiana della forma $y + z + d = 0$, e imponendo il passaggio per il punto p troviamo il piano Π di equazione $y + z - 6 = 0$. Per trovare il punto q di intersezione tra Π ed r si pu' scrivere il sistema in tre equazioni e tre incognite e risolverlo o pi' semplicemente sostituire le variabili nell'equazione parametrica di r all'interno dell'equazione cartesiana di Π, ricavare t e poi trovare il punto, nel nostro caso troviamo $2t - 6 = 0$, cio' $t = 3$ e il punto q ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. La distanza tra p ed r cioe' la distanza tra p e q e' $\sqrt{(3-1)^2} = 2$.

Esercizio 3. Punti 9 Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $L(X) = AX$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si considerino le coppie di vettori $\beta = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ e $\beta' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\}$. Provare che β e β' sono basi in $\mathbb{R}^2$ e determinare la matrice associata ad L rispetto alla base β in partenza e β' in arrivo. Calcolare nucleo e immagine di L. Soluzione Prima di tutto A e' una matrice quadrata con $det(A) \neq 0$, da questo si ricava subito che $Ker(A) = 0$ e $Imm A = \mathbb{R}^2$. Poi $det(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \neq 0$ e $det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}. \neq 0$ quindi β e β' sono basi. Ancora $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ Risolvendo il corrispondente sistema lineare ricaviamo $x = 0$ $y = 9/5$. Similmente $L(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Risolvendo il corrispondente sistema lineare ricaviamo $x' = -3/7$ $y' = 87/35$. La matrice associata e' quindi

$$M^{\beta}_{\beta'}(L) = \begin{pmatrix} 0 & -3/7 \\ 9/5 & 87/35 \end{pmatrix}.$$

In alternativa

$$M^{\beta}_{\beta'}(L) = M^{e}_{\beta'}(Id) M^{e}_{e}(L) M^{\beta}_{e}(Id)$$

dove e e' la base canonica di $\mathbb{R}^2$, $M^e_e(L) = A$ mentre $M^{\beta}_{e}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $M^{e}_{\beta'}(Id) = (M^{\beta'}_{e}(Id))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

4) Domanda delicata punti 6 Siano A una matrice $5x3$ a coefficienti reali, si consideri la matrice B $2x2$ ottenuta considerando gli elementi che sono sulla prima e terza colonna di A e che sono anche sulla seconda e quarta riga di A, supponiamo che si abbia $det(B) \neq 0$, si dimostri che la prima e terza colonna di A sono linearmente indipendenti e che la seconda e quarta riga di A sono linearmente indipendenti. Suggerimento Si scriva una combinazione lineare della prima e terza colonna di A che produca come risultato zero e se ne consideri il "pezzo in B" ... Analogamente per la seconda e quarta riga. Soluzione Se la matrice A e' della forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} \end{pmatrix}$$

allora B e' la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{pmatrix}$$

. Sia $\lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^3 = 0$ una combinazione lineare della prima e terza colonna che produce come risultato il vettore nullo. Espandendo questa combinazione si trovano cinque equazioni lineari omogenee nelle due incognite λ_1 e λ_2, prendendo in considerazione tra queste cinque equazioni soltanto la seconda e la quarta e riscrivendo cio' che si ottiene in forma di combinazione lineare si trova la combinazione lineare $\lambda_1 B^1 + \lambda_2 B^2 = 0$. Dato che il determinante di B e' diverso da zero per ipotesi, i vettori B^1 e B^2 sono linearmente indipendenti, quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, abbiamo cosi' dimostrato che A^1 ed A^3 sono linearmente indipendenti. Similmente se prendiamo una combinazione lineare $\lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_4 = 0$ la espandiamo e consideriamo solo la prima e la terza equazione che ne deriva troviamo $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = 0$. Dato che $det(B) = 0$ si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ quindi la seconda e quarta riga sono linearmente indipendenti.