Geometria 1 a.a. 2012-13 terza settimana

(1) In $\mathbf{R}^3$, spazio vettoriale su $\mathbf{R}$, si considerino i vettori

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire quali fra i vettori $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$ appartengono al sottospazio $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle$ generato da $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$.

(b) Dire quali fra i vettori $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$ appartengono al sottospazio $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle$.

(2) Si consideri il seguente sistema $\mathcal{S}$ a coefficienti in $\mathbf{R}$ nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

Dire quali fra le seguenti affermazioni sono vere. (a) $(0, 0, 1)$ è una soluzione di $\mathcal{S}$. (b) $(1, -1, 1)$ è una soluzione di $\mathcal{S}$. (c) $(1, 1, -1)$ è una soluzione di $\mathcal{S}$. (d) $x = 1$ è una soluzione di $\mathcal{S}$. (e) La somma di due soluzioni di $\mathcal{S}$ (pensate come vettori di $\mathbf{R}^3$) è ancora una soluzione di $\mathcal{S}$.

(3) Quali fra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ sono sottospazi?
(a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2\}$; (b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0\}$;
(c) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid$ esiste un $t \in \mathbf{R}$ tale che $x = 2t, y = -3t\}$;
(d) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 = y^3\}$; (e) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^4 = y^4\}$.
(f) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq y\}$.

(4) Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Dimostrare che $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se, per ogni $\bar{v}, \bar{w} \in W$, e per ogni $\alpha, \beta \in K$, si ha che $\alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in W$.

(5) Sia $V = \mathbf{R}^5$, spazio vettoriale su $\mathbf{R}$, e siano $U = \{(x_1, x_2, x_3, 0, 0) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$, e $W = \{(0, y_2, y_3, y_4, 0) \mid y_2, y_3, y_4 \in \mathbf{R}\}$. Determinare $U \cap W$, $U \cup W$ e $U + W$. Quali fra $U \cap W$, $U \cup W$ e $U + W$ sono sottospazi di $\mathbf{R}^5$?

(6) Di un sistema $\mathcal{S}$ lineare in tre incognite a coefficienti in $\mathbf{R}$ si sa che:
(a) $(1, 2, 3)$ è una soluzione di $\mathcal{S}$. (b) Il sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}$ è

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

È possibile determinare **tutte** le soluzioni del sistema $\mathcal{S}$? È possibile determinare $\mathcal{S}$?

(7) In $\mathbf{R}^3$ si considerino i vettori

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) È vero che $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle = \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2 \rangle$? (b) È vero che $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle = \langle \bar{v}_1, \bar{u}_1 \rangle$?

(8) Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, e siano W e U due sottospazi di V. Dimostrare che l'unione $W \cup U$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se $W \subseteq U$ oppure $U \subseteq W$.

(9) * Dato uno spazio vettoriale V sul campo K, ed un numero infinito di sottospazi $(W_i)_{i \in I}$ di V, dire se esiste un sottospazio di V che contiene tutti i W_i $(i \in I)$. Esiste il più piccolo sottospazio di V fra quelli che contengono tutti i W_i $(i \in I)$? Se esiste, darne una descrizione esplicita.