Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 1 a.a. 2012-13 prima settimana

1.1) Considera l'insieme $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 8, 11\}$ Considera la relazione R su A data da xRy se e solo se $x \geq y$ ($x, y \in A$).

(i) Determina il grafico della corrispondenza R.

(ii) Determina l'immagine, tramite R del sottoinsieme $Z = \{2, 11\}$.

(iii) Elenca gli elementi nell'antiimmagine (o controimmagine) di 1 tramite R.

(iv) Descrivi la corrispondenza inversa R^{-1} di R.

1.2) Mantieni le notazioni introdotte nell'esercizio precedente e considera la relazione S su A data da xSy se e solo se $x^2 = y^2$ ($x, y \in A$).

(i) Controlla se S è una relazione di equivalenza.

(ii) Elenca gli elementi di $S(R(-1))$.

(iii) È vero che $S \circ R$ coincide con $R \circ S$?

1.3) Dimostra che la composizione di corrispondenze è associativa, cioè che, comunque assegnate corrispondenze $R : A \to B$, $S : B \to C$, $T : C \to D$, si ha che $(T \circ S) \circ R = (T \circ S) \circ R$.

1.4) Considera l'insieme $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ dei numeri naturali. Descrivi una relazione in $\mathbf{N}$ che abbia una delle proprietà di essere riflessiva, simmetrica, transitiva, ma non le altre due. Costruisci poi una relazione che abbia due delle proprietà di essere riflessiva, simmetrica, transitiva, ma non la rimanente.

1.5) Considera l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e una relazione R su A il cui grafico contiene $(2, 3)$ e $(4, 5)$. Completa il grafico di R con il minimo numero di coppie in modo tale che la relazione R sia una relazione di equivalenza. Determina, infine, l'insieme quoziente di A modulo R.

1.6) Nello spazio euclideo, denota con $\mathcal{R}$ l'insieme delle rette. Due rette r e r' si dicono incidenti se $r \cap r' \neq \emptyset$. Consideriamo la relazione di *incidenza* R in $\mathcal{R}$ così definita: rRr' se e solo se r e r' sono incidenti. La relazione R è simmetrica? è riflessiva? è transitiva?

1.7) Nello spazio euclideo, denota con $\mathcal{P}$ l'insieme dei piani. Due piani α e α' si dicono paralleli se $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$. Consideriamo la relazione di *parallelismo* S in $\mathcal{P}$ così definita: $\alpha S \alpha'$ se e solo se α e α' sono incidenti. Mostra che S è una relazione di equivalenza. Le corrispondenti classi di equivalenza prendono il nome di "giaciture".

1.8) Dati tre insiemi A, B, C. Mostra che:

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(ii) $A \cup B = A$ se e solo se $B \subseteq A$.

(iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.