14.1) In $\mathbf{R}^5$, con prodotto scalare standard, considera i vettori $\mathbf{v}_1(4,-1,0,1,-1)$ e $\mathbf{v}_2(1,0,3,-1,1)$.

a) Calcola il prodotto scalare $\mathbf{v}_1 \times t\mathbf{v}_2$.

b) Decomponi $\mathbf{v}_2$ come somma di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$, con $\mathbf{u}$ proporzionale a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{u}'$ ortogonale a $\mathbf{v}_1$.

c) Determina una base ortonormale del sottospazio W generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

d) Calcola la dimensione e una base del sottospazio ortogonale a $\mathbf{v}_1$.

e) Calcola la dimensione e una base del sottospazio ortogonale al sottospazio W generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

14.2) In uno spazio euclideo di dimensione 4, sia fissato un sistema di riferimento monometrico ortonormale. Considera i punti $A(1,1,0,-1)$, $B(1,0,3,2)$, $C(0,3,0,1)$.

a) Determina la distanza $d(A,B)$ tra A e B.

b) Verifica che $d(A,B)+d(B,C) \geq d(A,C)$.

c) Determina l'equazione cartesiana dell'iperpiano H per C e ortogonale a $\mathbf{AB}$ e calcola la distanza tra A e H

d) Controlla se è parallela ad H la retta r di numeri direttori $(1,0,0,0)$.

e) Determina equazioni cartesiane per un sottospazio S di dimensione 2 e ortogonale al piano α generato da A, B, C. L'intersezione $S \cap \alpha$ può essere vuota?

14.3) In uno spazio euclideo di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento monometrico ortonormale $(O,(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}))$. Considera il vettore $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ e il punto $Q(3,0,-2)$.

a) Determina l'equazione cartesiana del piano α ortogonale a $\mathbf{n}$ e passante per Q.

b) Controlla se sono ortogonali le rette r passante per Q e parallelo ad $\mathbf{n}$ e la retta s di equazioni $x_1 + x_2 + 3x_3 + 1 = 0$, $2x_2 - x_3 - 5 = 0$.

Determina (se tale retta esiste) equazioni cartesiane per una retta t_1 passante per Q e ortogonale sia a r che a s.

Determina (se tale retta esiste) equazioni parametriche per una retta t_2 incidente sia r che s e ortogonale a $\mathbf{i}$.

Determina (se tale retta esiste) equazioni cartesiane per una retta t_3 incidente sia r che s e ortogonale sia a r che a s.

c) Determina il prodotto esterno $\mathbf{n} \wedge \mathbf{w}$, ove $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

d) Determina l'area del parallelogramma di vertici $A(1,0,1)$, $B(2,1,1)$, $C(-1,4,2)$.

14.4) In uno spazio euclideo di dimensione 2, sia fissato un sistema di riferimento monometrico ortonormale $(O,(\mathbf{i},\mathbf{j}))$. Considera la retta r di equazioni parametriche $x_1 = 2+2t$, $x_2 = -1+t$ $(t \in \mathbf{R})$.

a) Determina l'equazione cartesiana della retta s passante per $A(3,-7)$ e ortogonale alla retta r.

b) Determina le coordinate della proiezione ortogonale B' di $B(-2,1)$ su r.