11.1) Sia $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $H(\mathbf{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $H(\mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $H(\mathbf{E}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, ove con $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ si denoti la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Determinare la matrice di H rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

b) Determinare la dimensione ed una base di Im H.

c) Determinare la dimensione ed una base di Ker H. L'applicazione H è iniettiva?

Soluzione a) La matrice cercata è la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

ottenuta prendendo come colonne le immagini dei vettori della base canonica.

b) La dimensione di Im H è uguale al rango di M, che è 2. Poiché nel codominio si è usata la base canonica, come base di Im H basta prendere due colonne linearmente indipendenti di M, quali ad esempio $H(\mathbf{E}_1)$, $H(\mathbf{E}_2)$.

c) Il nucleo di H ha dimensione pari a $3-$ dim Im $H = 3 - 2 = 1$ e, in particolare, H non è iniettiva. Poichè $-H(\mathbf{E}_1) + 2H(\mathbf{E}_2) = H(\mathbf{E}_3)$, ricavo che $(-1, 2, -1)^t$ è una base di Ker H.

11.2) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'unica applicazione lineare tale che $f(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 2, 0)$, $f(\mathbf{e}_2) = (1, 2, 0, 1)$, $f(\mathbf{e}_3) = (-1, 0, 2, 0)$, $f(\mathbf{e}_4) = (1, 1, 0, 1)$. Sia Z il sottospazio generato da $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$.

a) Mostrare che $f(Z) \subseteq Z$.

b) Determinare la matrice $\mathbf{B}$ di f nel riferimento $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$.

c) Che particolarità ha la matrice $\mathbf{B}$? Osservare che il riferimento $\mathcal{B}$ è completamento di un riferimento di Z.

11.3) Mostra che, se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva tra spazi vettoriali (di dimensione finita), esistono una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{C}$ di W tale che la matrice A di f rispetto alle basi indicate sia della forma $\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, ove con $\mathbf{I}$ si denoti la matrice identica di ordine uguale alla dimensione di V, e con $\mathbf{0}$ una matrice con tutti i coefficienti nulli.

11.4) Sia Z il sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^4$ generato $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$. Determinare una applicazione lineare di V in sè tale che $Z = Imf = Kerf$.

11.5) Calcola tramite l'algoritmo di Gauss l'inversa della matrice $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11.6) Determinare le matrici del cambio di base $M_E^R(id)$, $M_{R'}^E(id)$, $M_{R'}^R(id)$ in $\mathbf{R}^2$, dove E sia il riferimento canonico, $R = ((1, 4), (2, 1))$, $R' = ((5, 1), (1, 7))$.