10.1) Determina la dimensione ed una base di ker f e Im f, ove $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è definita da $f(x,y,z) = (x+3z, 2x+y+z, 3x+y+4z)$.

10.2) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to: \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $f(\vec{e}_1) = (1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,2,0,1)$, $f(\vec{e}_3) = (-1,0,2,0)$, $f(\vec{e}_4) = (1,1,0,1)$.

a) Determina l'espressione di $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

b) Sia W il sottospazio generato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$. Mostra che $f(W) \subset W$.

10.3) Denota con $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e con $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3\}$ quella di $\mathbf{R}^3$. Determinare, se esiste, una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ tale che Im $f =< \mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_3 >$, ker $=< \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 >$.

10.4) Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1+x_2, x_3+x_4, x_1+x_3)$.

a) Determina la matrice A associata a T rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ di $\mathbf{R}^4$ e alla base canonica $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3\}$ di $\mathbf{R}^3$.

b) Determina la dimensione ed una base di Im T.

c) Determina la dimensione ed una base del nucleo ker T.

10.5) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $f(\mathbf{v}_1) = 3\,\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 3\,\mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$, , ove con $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ si denoti una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Determina la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in dominio e codominio.

b) Determina le componenti in $\mathcal{B}$ di un vettore $\mathbf{v}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_3$.

10.6) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita da

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2, 3x_1 + x_2 - x_3, 6x_1 - 2x_2 - x_3, 0).$$

a) Determina una base per ciascuno dei sottospazi $Ker\, f$ e $Im\, f$.

b) Determina una base e la dimensione dell'intersezione $Ker\, f \cap Im\, f$.

c) Determina una base e la dimensione di $Ker\,(f \circ f)$.

10.7) Considera una base $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ di uno spazio vettoriale V e una base $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$ una base di uno spazio vettoriale W sullo stesso campo. Considera l'applicazione lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2$, $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in Ker(f)$.

a) Determina le coordinate (y_1,y_2) di $f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3)$, rispetto alla base assegnata del codominio. Determina, inoltre, la matrice di f nelle basi assegnate.

b) Determina il nucleo di f.