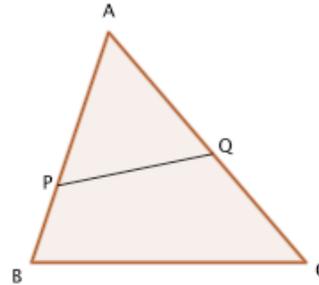


Teorema di Talete

Una retta parallela ad un lato di un triangolo taglia gli altri due lati del triangolo in modo proporzionale. Viceversa, se una retta taglia due lati di un triangolo in modo proporzionale, allora è parallela al terzo lato del triangolo.

Consideriamo un triangolo ABC come in figura e tracciamo un segmento PQ che congiunge un punto P sul lato AB con un punto Q sul lato AC.

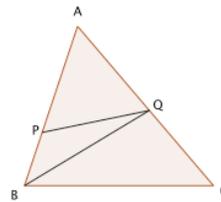


Possiamo riscrivere l'enunciato nella forma

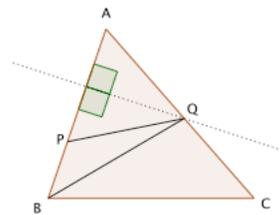
$$(1) \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \text{ se e solo se } PQ \parallel BC.$$

Dimostrazione

Congiungiamo Q con B.



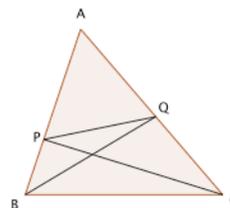
Consideriamo i triangoli APQ e PBQ. L'altezza di APQ rispetto alla base AP è uguale all'altezza di PBQ rispetto alla base PB.



Poichè i triangoli APQ e PBQ hanno la stessa altezza, devono avere le aree proporzionali alle loro basi rispettive:

$$(*) \quad \frac{\text{area } APQ}{\text{area } PBQ} = \frac{AP}{PB}.$$

Ora congiungiamo P con C (post. 1) Analogamente a prima, i triangoli APQ e PCQ hanno la stessa altezza rispetto alle basi AQ e QC, rispettivamente.



Le aree dei triangoli APQ e PCQ sono quindi proporzionali alle rispettive basi:

$$(**) \quad \frac{\text{area } APQ}{\text{area } PCQ} = \frac{AQ}{QC}$$

Sia in (*) che in (**) il rapporto a sinistra studia la relazione tra l'area di APQ e quella di un altro triangolo. Affinché i rapporti in (*) e in (**) siano uguali, occorre e basta che $area\ PQB = area\ PCQ$. Dunque

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \text{ se e solo se } area\ PQB = area\ PCQ. \quad (***)$$

Riguardiamo i triangoli PQB e PQC come triangoli di base PQ: poiché essi hanno la stessa base, la loro area coincide se e solo se hanno altezza uguale, se e solo se la distanza tra B e P coincide con la distanza tra C e Q, cioè se e solo se $PQ \parallel BC$.

Abbiamo così concluso la dimostrazione. ♣

Corollario Mantenendo le notazioni del teorema, $PQ \parallel BC$, se e solo se $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$.

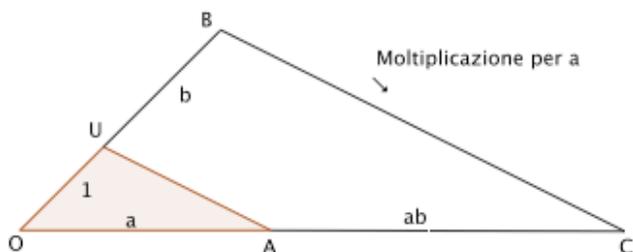
Applicazioni del teorema di Talete

1. Moltiplicazione di segmenti

Nel primo libro degli Elementi, Euclide insegna come sommare e sottrarre tra loro due segmenti. Il Teorema di Talete ci mostra come moltiplicare e dividere tra loro due segmenti. Incominciamo dalla moltiplicazione.

Occorre fissare un segmento come unità di misura, che denoteremo con OU.

Consideriamo ora due segmenti, di lunghezza a e b rispettivamente. Vogliamo, con riga e compasso, costruire un segmento la cui lunghezza sia ab .



Disegniamo un segmento di lunghezza a con primo estremo O e lo chiamiamo OA.

Prolunghiamo OU con un segmento UB tale che la lunghezza di UB sia b .

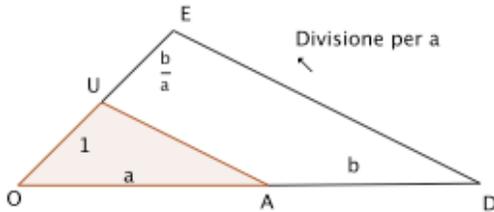
Tracciamo per B la parallela a UA e chiamiamo C la sua intersezione con il prolungamento di OA.

Mostriamo che il segmento AC ha lunghezza ab : infatti, per il teorema di Talete,

$$\frac{OA}{OU} = \frac{AC}{UB} \text{ e dunque } \frac{a}{1} = \frac{AC}{b}.$$

2. Divisione di segmenti

Occorre fissare un segmento come unità di misura, che denoteremo con OU . Consideriamo due segmenti, di lunghezza a e b rispettivamente. Vogliamo, con riga e compasso, costruire un segmento la cui lunghezza sia $\frac{b}{a}$.



Disegniamo un segmento di lunghezza a con primo estremo O e lo chiamiamo OA . Prolunghiamo OA con un segmento AD tale che la lunghezza di AD sia b . Tracciamo per D la parallela a OU e chiamiamo E la sua intersezione con il prolungamento di OU .

Mostriamo che il segmento UE ha lunghezza $\frac{b}{a}$: infatti, per il teorema di Talete,

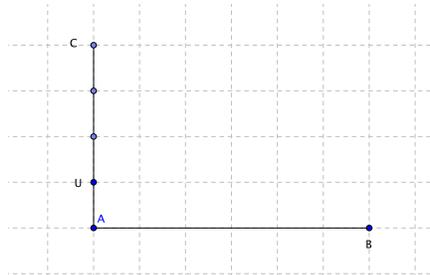
$$\frac{OA}{OU} = \frac{AD}{UE} \text{ e dunque } \frac{a}{1} = \frac{b}{UE}.$$

3. Divisione di un segmento in n parti uguali

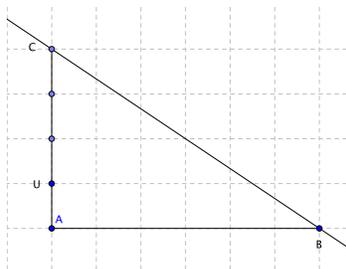
Dato un segmento AB , vogliamo dividerlo in n parti uguali, usando solo riga e compasso (n numero naturale fissato > 0).

Fissiamo una unità di misura di lunghezza 1 .

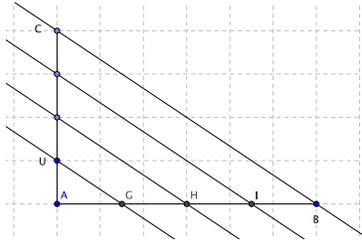
Su un altro segmento uscente da A (disegnato in verticale nella figura), tracciamo n segmenti uguali a 1 ($n=4$ nella figura): nella figura, AU ha lunghezza 1 , come ciascuno degli altri segmenti tra loro adiacenti; viene indicato con C l'ultimo estremo di tali segmenti



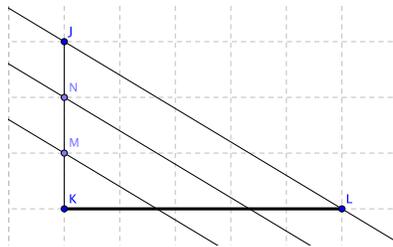
Ora tracciamo la retta per C e B



e poi le parallele a questa retta passanti per ciascuno degli estremi dei segmenti uguali su AC:



Il segmento AB risulta in questo modo suddiviso in parti uguali (lo stesso numero di parti uguali che erano stati segnati in AC).



Il segmento KL diviso in 3 parti uguali

Un modo comodo per tracciare le rette parallele è di costruire una retta trasversale anche sulla seconda estremità del segmento da suddividere, come in figura:

