2

Sottospazi di uno spazio affine

Descriviamo ora i sottoinsiemi di uno spazio affine che, a loro volta, siano spazi affini. In particolare, studiamo la loro dimensione e le relazioni che tra essi intercorrono. Ci occuperemo solamente di spazi affini di dimensione finita e dei loro sottospazi. Ciò malgrado, riporteremo talora l'ipotesi che gli spazi coinvolti abbiano dimensione finita, per sottolineare che alcuni risultati non ammettono estensione al caso di dimensione infinita.

2.1 La nozione di sottospazio di uno spazio affine

Sia $(\mathbb{A}, f)$ uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$.

Definizione 2.1.1. Un *sottospazio affine* di $\mathbb{A}$ (o semplicemente un *sottospazio*) è un sottoinsieme S di $\mathbb{A}$ tale che esistono un punto $P \in S$ e un sottospazio vettoriale $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ tali che

$$S = \{P + \mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}\}.$$

Il sottospazio S si denota anche col simbolo

$$P + \mathbf{W}.$$

Diciamo che S *passa per* P e che il sottospazio $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ è la *giacitura* di S. Denotiamo la giacitura di S anche con il simbolo

$$\mathbf{V}(S).$$

I vettori di $\mathbf{V}(S)$ vengono chiamati i *vettori liberi paralleli a* S.

In altri termini S è costituito da tutti e solo i punti $Q \in \mathbb{A}$ tali che $\mathbf{Q} - \mathbf{P} \in \mathbf{W}$. In particolare ogni punto P di $\mathbb{A}$ è un sottospazio, poiché coincide con $P+(\mathbf{0})$, e $\mathbb{A}$ stesso è un sottospazio poiché coincide con $P+\mathbf{V}(\mathbb{A})$ con P punto qualunque di $\mathbb{A}$. Ogni sottospazio di $\mathbb{A}$ diverso da $\mathbb{A}$ si dice un *sottospazio proprio*.

La definizione precedente è una buona definizione grazie ai risultati seguenti, in base ai quali un sottospazio passa per ciascuno dei suoi punti e che ogni sottospazio affine individua univocamente la sua giacitura:

Proposizione 2.1.2. *Sono equivalenti le proposizioni:*

(a) $P + \mathbf{W} = Q + \mathbf{W}'$*;*
(b) $Q \in P + \mathbf{W}$ *e* $\mathbf{W} = \mathbf{W}'$.

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b) È chiaro che $Q \in P + \mathbf{W}$ perché $Q \in Q + \mathbf{W}'$; ne segue che $\mathbf{Q} - \mathbf{P} \in \mathbf{W}$. Proviamo che $\mathbf{W}' \subseteq \mathbf{W}$. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}'$ allora $Q + \mathbf{v} \in Q + \mathbf{W}'$. Quindi $Q + \mathbf{v} = P + (\mathbf{Q} - \mathbf{P}) + \mathbf{v} \in P + \mathbf{W}$ e perciò $(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) + \mathbf{v} \in \mathbf{W}$ da cui $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$. Similmente si prova che $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}'$ e perciò $\mathbf{W} = \mathbf{W}'$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Poiché $Q \in P + \mathbf{W}$, si ha $\mathbf{Q} - \mathbf{P} \in \mathbf{W}$. Se $X \in \mathbb{A}$ si ha $\mathbf{X} - \mathbf{Q} = (\mathbf{X} - \mathbf{P}) + (\mathbf{P} - \mathbf{Q})$ e quindi $\mathbf{X} - \mathbf{Q} \in \mathbf{W}$ se e solo se $\mathbf{X} - \mathbf{P} \in \mathbf{W}$: dunque $P + \mathbf{W} = Q + \mathbf{W}'$. □

È importante osservare che:

Proposizione 2.1.3. *Il sottospazio affine* $S = P + \mathbf{W}$ *è uno spazio affine con spazio vettoriale associato* $\mathbf{W}$.

Dimostrazione. Se restringiamo l'applicazione $f : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbf{V}(\mathbb{A})$ al sottoinsieme $S \times S$ abbiamo una applicazione $f_S : S \times S \to \mathbf{W}$. Infatti se P e Q sono punti di S si ha $\mathbf{P} - \mathbf{Q} \in \mathbf{W}$. Si vede subito che $f_S : S \times S \to \mathbf{W}$ individua una struttura di spazio affine su S. □

Ha dunque senso parlare di *dimensione* di un sottospazio affine:

Definizione 2.1.4. La *dimensione* di un sottospazio affine S è la dimensione della sua giacitura, qualora tale dimensione sia finita. I sottospazi di dimensione zero sono i punti di $\mathbb{A}$, quelli di dimensione 1 si dicono *rette*, quelli di dimensione 2 *piani*.

Definizione 2.1.5. Se S è una retta, la giacitura $\mathbf{V}(S)$ è detta anche la *direzione* di S e un qualunque vettore non nullo di $\mathbf{V}(S)$ si dice un *vettore direttore*, o *vettore di direzione* di S. Il vettore direttore di una retta è definito a meno di proporzionalità per uno scalare non nullo.

Definizione 2.1.6. Se $\mathbb{A}$ ha dimensione finita e S è un suo sottospazio l'intero

$$\mathrm{codim}_{\mathbb{A}}(S) = \dim \mathbb{A} - \dim S$$

si dice *codimensione* di S in $\mathbb{A}$. I sottospazi di codimensione 1 si dicono *iperpiani* di $\mathbb{A}$.

Proviamo ancora la:

Proposizione 2.1.7. *Siano S e S' sottospazi di $\mathbb{A}$, con $S \subseteq S'$. Supponiamo che S' abbia dimensione finita. Allora* $\dim S \leq \dim S'$ *(e dunque anche S ha dimensione finita) e S è un sottospazio affine di S'. Inoltre, S e S' hanno la stessa dimensione se e solo se $S = S'$.*

Dimostrazione. Sia $P \in S$. Allora $S = P + \mathbf{W}$ e $S' = P + \mathbf{W}'$. Proviamo che $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}'$ dal che segue facilmente l'asserto. Infatti se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ allora $P + \mathbf{v} \in S$ e quindi $P + \mathbf{v} \in S'$, da cui $\mathbf{v} \in \mathbf{W}'$. □

E ora alcuni esempi.

Esempio 2.1.8. **Sottospazi affini di uno spazio vettoriale.** Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. I sottospazi affini di $\mathbf{V}$ sono i traslati dei sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ mediante i vettori di $\mathbf{V}$.

Esempio 2.1.9. **Rette di uno spazi affine** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n. Una retta r di $\mathbb{A}$ è della forma $P + \mathbf{W}$ per un punto $P \in \mathbb{A}$ e un sottospazio $\mathbf{W}$ di dimensione 1 di $\mathbf{V}$. Ma un sottospazio vettoriale di dimensione 1 è generato da un qualsiasi suo vettore non nullo $\mathbf{w}$. Conoscendo un suo punto ed un suo vettore direttore, possiamo quindi ricostruire la retta. Ogni altro punto S di r è della forma $S = P + t\mathbf{w}$ per un opportuno t in $\mathbb{K}$. Se $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ sono le coordinate di P in un riferimento affine e $(w_1, \dots, w_n)$ le componenti di $\mathbf{w}$ nel medesimo riferimento, tali equazioni si scrivono (in forma scalare)

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + tw_1 \\ x_2 = p_2 + tw_2 \\ \dots \\ x_n = p_n + tw_n \end{cases} \tag{2.1}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$. In particolare se $Q \in r$ è un punto fissato di coordinate $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, il vettore $\mathbf{PQ}$ è multiplo di $\mathbf{w}$ e la retta r per P e Q ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) \\ \dots \\ x_n = p_n + t(q_n - p_n) \end{cases} \tag{2.2}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$. Chiaramente P si riottiene dando il valore 0 al parametro t e Q dando il valore 1 al parametro t.

Supponiamo assegnati un riferimento $\mathcal{R}$ e una retta r. Si dicono *numeri direttori* di r in $\mathcal{R}$ le componenti in $\mathcal{R}$ di un qualunque vettore direttore di r. I numeri direttori di una retta non sono univocamente determinati, ma differiscono tra loro per un fattore di proporzionalità non nulla. Se $P(\mathbf{p})$ e $Q(\mathbf{q})$ sono punti distinti di r, una n-pla di numeri direttori di r è data dalle componenti di $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Esempio 2.1.10. **Sottospazi affini dello spazio della geometria euclidea** I sottospazi affini dello spazio affine della geometria euclidea coincidono con i punti (sottospazi di dimensione 0), le rette (sottospazi di dimensione 1), i piani (sottospazi di dimensione 2) e lo spazio stesso (unico sottospazio di dimensione 3).

Esempio 2.1.11. **Sottospazi del piano affine numerico** $\mathbb{A}^2$ In $\mathbb{A}^2$, i sottospazi propri sono i punti e le rette. Supponiamo assegnati un riferimento $\mathcal{R}$ e una retta r. Se $P(\mathbf{p}) \in r$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{K}^2$ è una coppia di numeri direttori di r, i punti di r sono i punti con coordinate

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{w}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$: queste equazioni prendono il nome di *equazione parametrica vettoriale* di r. Se $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, tali equazioni si scrivono in modo più esteso come

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + tw_1 \\ x_2 = p_2 + tw_2 \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$. In particolare se $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, la retta r per P e Q ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$. Chiaramente P si riottiene dando il valore 0 al parametro t e Q dando il valore 1 al parametro t.

Cerchiamo ora un metodo differente per caratterizzare i punti di coordinate (x_1, x_2) tali che $(x_1 - p_1, x_2 - p_2)$ sia proporzionale a (w_1, w_2). Osserviamo che, se $w_1 = q_1 - p_1 = 0$, tutti i punti di r hanno la prima coordinata uguale a $p_1 (= q_1)$ e la retta coincide con l'insieme dei punti le cui coordinate sono soluzione dell'equazione $x_1 = p_1$. Se, invece, $w_1 = q_1 - p_1 \neq 0$, la prima delle equazioni parametriche (in forma estesa) assicura che $t = \frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1}$. Sostituendo questa uguaglianza nella seconda equazione, troviamo la relazione: $(q_1 - p_1)x_2 - (q_2 - p_2)x_1 = p_2 q_1 - p_1 q_2$, che è una equazione lineare le cui soluzioni sono esattamente le coordinate dei punti di r.

Dunque, ogni retta in un piano affine viene descritta in un dato riferimento da una equazione del tipo

$$ax + by + c = 0$$

con $(a, b) \neq (0, 0)$, che prende il nome di *equazione cartesiana* della retta; con questa espressione intendiamo che i punti della retta sono quelli le cui coordinate soddisfano l'equazione. Diciamo che *la retta è rappresentata dalla sua equazione cartesiana.* La retta individua l'equazione cartesiana solo a meno multiplo per una costante non nulla.

Osserviamo anche che dalla equazione cartesiana ritroviamo facilmente la giacitura di r: le coordinate in $\mathcal{R}$ dei vettori della giacitura di r sono le soluzioni dell'equazione omogenea associata $ax + by = 0$ (cioè i multipli scalari di $(-b, a)$).

Ad esempio, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ il piano $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è il piano affine numerico reale; la retta r passante per i punti $P(1, 2)$ e $Q(3, 7)$ ha equazioni parametriche (nel dato riferimento)

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 5t \end{cases} \tag{2.3}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Si noti che r ha anche rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = 3 - 10t \\ y = 7 - 25t \end{cases}$$

ove abbiamo sostituito P con Q quale punto corrispondente al valore 0 del parametro t, e abbiamo sostituito i numeri direttori $(2, 5)$ con $(-10, -25)$ che sono ancora numeri direttori perchè proporzionali ai primi.

Riprendiamo ora le equazioni (2.3). Dalla prima equazione, ricaviamo che $t = (1/2)(x-1)$. Sostituendo questa uguaglianza nella seconda equazione, troviamo che $y = 2 + 5(1/2)(x-1)$, cioè $5x - 2y - 1 = 0$. Deduciamo che i punti della retta sono esattamente tutti e soli i punti le cui coordinate (x, y) soddisfano l'equazione $5x - 2y - 1 = 0$.

Viceversa, ogni equazione lineare di primo grado in due incognite rappresenta una retta. Infatti, sia data l'equazione $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$. L'insieme di punti di $\mathbb{A}^2$ le cui coordinate sono soluzione dell'equazione è dato da $\{(c/a, 0) + t(-b, a)\}$ se $a \neq 0$, e da $\{(0, -b/a) + t(1, 0)\}$ se $a = 0$: in ogni caso, costituisce una retta.

Esempio 2.1.12. **Sistemi lineari e sottospazi affini di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$** Sia dato un sistema lineare compatibile $\mathcal{A}$ di p equazioni in n incognite, scritto in forma vettoriale come

$$\mathcal{A} : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.4}$$

con $\mathbf{A} \in M(p, n; \mathbb{K})$, $\mathbf{x}$ vettore colonna di indeterminate e $\mathbf{b}$ vettore colonna d'ordine p dei termini noti. L'insieme

$$Sol(\mathcal{A}) = \{\xi \in \mathbb{A}^n : \mathbf{A} \cdot \xi = \mathbf{b}\} \tag{2.5}$$

delle sue soluzioni è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$, la cui giacitura è il sottospazio vettoriale $Sol(\mathcal{A}^{om})$ di $\mathbb{K}^n$, dove $\mathcal{A}^{om}$ è il sistema omogeneo

$$\mathcal{A}^{om} : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

associato ad $\mathcal{A}$. Ciò segue dal fatto che $Sol(\mathcal{A}) = \xi_0 + Sol(\mathcal{A}^{om})$ se ξ_0 è una soluzione di $\mathcal{A}$ (cfr. [1], proposizione 5.12). Se $r = \mathrm{rg}(\mathbf{A})$, allora la dimensione del sottospazio affine $Sol(\mathcal{A})$ vale $n - r$.

In particolare, possiamo considerare l'insieme dei punti le cui coordinate $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sono soluzione di una singola equazione non nulla

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0 \text{ con } (a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Tale sottospazio affine ha dimensione $n - 1$ e viene detto *iperpiano*. Consideriamo ora i sottospazi rappresentati in $\mathcal{R}$ da sistemi normali del tipo

$$x_{i_1} = \ldots = x_{i_h} = 0$$

con $1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n$. Questi sottospazi, che passano per l'origine del riferimento e sono caratterizzati dal fatto che i loro punti hanno alcune delle coordinate nulle, si dicono *sottospazi coordinati del riferimento* $\mathcal{R}$. Tra questi notiamo i sottospazi coordinati di dimensione 1, detti anche *assi coordinati del riferimento* $\mathcal{R}$. Di tali assi ve ne sono n: sono rappresentati da sistemi di equazioni cartesiane del tipo

$$x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0 \qquad i = 1, \ldots, n;$$

l'asse rappresentato dal sistema suddetto, caratterizzato dal fatto che tutte le coordinate dei suoi punti, tranne l'i-sima, sono nulle (mentre l'i-sima varia

descrivendo tutto $\mathbb{K}$) si dice *l'asse* x_i del riferimento $\mathcal{R}$. Una n-pla di numeri direttori dell'asse x_i è data dal vettore $\mathbf{e}_i$ della base canonica.
Gli *iperpiani coordinati* sono n, di equazione $x_i = 0$ (con $i = 1, \ldots, n$).

2.2 Intersezione e spazio congiungente di sottospazi affini

In questo paragrafo, $\mathbb{A}$ sarà uno spazio affine di dimensione finita n su un campo $\mathbb{K}$. Tutti i sottospazi considerati saranno sottospazi di $\mathbb{A}$. Iniziamo mostrando che l'intersezione di due sottospazi affini è ancora un sottospazio affine:

Proposizione 2.2.1. *Se S e S' sono sottospazi affini tali che $S \cap S' \neq \emptyset$, allora $S \cap S'$ è il sottospazio affine di $\mathbb{A}$ passante per un punto $P \in S \cap S'$ e avente per giacitura l'intersezione delle giaciture di S e S'.*

Dimostrazione. Se $P \in S \cap S'$, possiamo scrivere $S = P + \mathbf{W}$ e $S' = P + \mathbf{W}'$. Si ha

$$Q \in S \cap S' \Leftrightarrow \mathbf{Q} - \mathbf{P} \in \mathbf{W} \text{ e } \mathbf{Q} - \mathbf{P} \in \mathbf{W}'$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Q} - \mathbf{P} \in \mathbf{W} \cap \mathbf{W}' \Leftrightarrow Q \in P + (\mathbf{W} \cap \mathbf{W}').$$

□

Esempio 2.2.2. Se S è una retta di $\mathbb{A}$ e S' è un sottospazio di $\mathbb{A}$, allora si presenta una delle seguenti alternative: (1) $S \cap S' = \emptyset$; (2) S' è un punto di S; (3) $S' = S$; (4) S' contiene propriamente S.
Infatti se l'intersezione $S \cap S'$ è un sottospazio non vuoto e proprio della retta S, deve essere un punto. In particolare, può succedere che S' sia un punto di S.

Esempio 2.2.3. Se S è un iperpiano di uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione finita n, e S' un sottospazio proprio di $\mathbb{A}$ tale che $S \cap S' \neq \emptyset$, allora si hanno le seguenti possibilità:

(1) S contiene S';
(2) $S \cap S'$ è un sottospazio di $\mathbb{A}$ di dimensione pari a $\dim S' - 1$.

Infatti, fissato $P \in S \cap S'$, sia $S = P + \mathbf{W}$ e $S' = P + \mathbf{W}'$. Se non si verifica la (1), $\mathbf{W}$ non contiene $\mathbf{W}'$. Allora $\dim \mathbf{W} \cap \mathbf{W}' = \dim \mathbf{W}' - 1$ (cfr. [1], esempio 9.15), e quanto asserito segue dalla proposizione 2.2.1.

La dimostrazione della proposizione 2.2.1 assicura anche che *l'intersezione di una famiglia di sottospazi di $\mathbb{A}$, se non vuota, è ancora un sottospazio di* $\mathbb{A}$. In particolare:

Definizione 2.2.4. Se X è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{A}$, l'intersezione di tutti i sottospazi di $\mathbb{A}$ contenenti X è il sottospazio di $\mathbb{A}$ detto *sottospazio generato da X* e denotato col simbolo

$$< X > .$$

Se $S_1, \ldots, S_n$ sono sottospazi di $\mathbb{A}$ il sottospazio generato dall'unione di $S_1, \ldots, S_n$ si denota anche col simbolo

$$S_1 \vee \ldots \vee S_n$$

e si dice *sottospazio congiungente* $S_1, \ldots, S_n$.

Osserva che il sottospazio generato da un sottoinsieme X è il più piccolo sottospazio di $\mathbb{A}$ contenente X nel senso che ogni sottospazio contenente X contiene anche $< X >$.

Studiamo lo spazio generato da un insieme finito di punti di $\mathbb{A}$.

Proposizione 2.2.5. *Il sottospazio generato da punti $P_0, \ldots, P_s \in \mathbb{A}$ coincide con*

$$P_0 + < \mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}, \ldots, \mathbf{P_s} - \mathbf{P_0} > \tag{2.7}$$

e ha dimensione $m \leq s$.

Dimostrazione. Posto $\mathbf{W} =< \mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}, \ldots, \mathbf{P_s} - \mathbf{P_0} >$, è chiaro che $P_0 + \mathbf{W}$ è un sottospazio che contiene $P_0, \ldots, P_s$ ed ha dimensione al più s. D'altra parte il sottospazio generato da $P_0, \ldots, P_s$ deve contenere $P_0 + \mathbf{W}$. Da ciò l'asserto. □

Definizione 2.2.6. I punti P_0, ..., P_s di $\mathbb{A}$ si dicono *punti indipendenti* se non appartengono a nessun sottospazio affine di dimensione $s-1$ di $\mathbb{A}$, cioè se il sottospazio generato da $P_0, \ldots, P_s$ ha esattamente dimensione s.

Osservazione 2.2.7. i) Siano assegnati punti $P_0, \ldots, P_s$ di $\mathbb{A}$. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} P_0, \ldots, P_s \text{ sono indipendenti } &\Leftrightarrow \text{ i vettori } \mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}, \ldots, \mathbf{P_s} - \mathbf{P_0} \\ &\qquad \text{sono linearmente indipendenti} \\ &\Leftrightarrow dim < \mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}, \ldots, \mathbf{P_s} - \mathbf{P_0} >= s. \end{aligned}$$

ii) *Se A ha dimensione finita n, il massimo numero di punti indipendenti di A vale $n+1$ ed esistono $(n+1)$-ple di punti indipendenti di* $\mathbb{A}$. Per verificare ciò basta ridursi al caso $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n$. Allora $(O, O + \mathbf{e}_1, \ldots, O + \mathbf{e}_n)$ è una $(n+1)$-pla di punti indipendenti (ma, si badi, non di vettori numerici linearmente indipendenti).

In particolare in ogni sottospazio di dimensione m di $\mathbb{A}$ esistono $(m+1)$-ple di punti indipendenti. Osserviamo che, *se P_0, ..., P_m sono punti indipendenti di un sottospazio S di dimensione m, allora $S = P_0 \vee \ldots \vee P_m$.*
iii) *Fissato un qualunque riferimento affine, i punti P_0, ..., P_m sono indipendenti se e solo se i loro vettori delle coordinate sono punti indipendenti nello spazio affine numerico.* Si veda l'Esercizio Svolto 2.4 per una caratterizzazione dei punti indipendenti a partire dalle loro coordinate in un riferimento.

Definizione 2.2.8. Diciamo che i punti $P_0, \ldots, P_s$ sono *allineati* se esiste una retta affine che li contiene tutti. Diciamo che i punti $P_0, \ldots, P_s$ sono *complanari* se esiste un piano affine che li contiene tutti. Analogamente, diciamo che due rette sono *complanari* se esiste un piano affine che contiene entrambe.

Grazie alla proposizione 2.2.5, si ricava in particolare che per due punti distinti passa una e una sola retta, per tre punti distinti e non allineati passa uno e un solo piano, che quattro punti non complanari individuano un unico spazio di dimensione 3 che li contiene, ecc.

Proposizione 2.2.9. *Siano S e S' sottospazi affini.*
(i) Se $S \cap S' \neq \emptyset$, il sottospazio $S \vee S'$ è il sottospazio passante per un punto di P di $S \cap S'$ e avente per giacitura lo spazio vettoriale somma delle giaciture di S e S'.
(ii) Siano $P \in S$ e $Q \in S'$. Il sottospazio $S \vee S'$ è il sottospazio passante per P e avente per giacitura lo spazio vettoriale somma delle giaciture di S e S' e del sottospazio generato da $\mathbf{PQ}$*:*

$$S \vee S' = P + (V(S) + V(S') + < \mathbf{PQ} >).$$

Dimostrazione. (i) Sia $P \in S \cap S'$ e scriviamo $S = P + \mathbf{W}$ e $S' = P + \mathbf{W}'$. Sia T un sottospazio che contiene S e S'. Allora $T = P + \mathbf{W}''$ e $\mathbf{W}''$ contiene tanto $\mathbf{W}$ che W', quindi $\mathbf{W}''$ contiene $\mathbf{W} + \mathbf{W}'$. Pertanto $P + (\mathbf{W} + \mathbf{W}')$ è contenuto in T. Ciò prova che $P + (\mathbf{W} + \mathbf{W}')$ è il più piccolo sottospazio contenente S e S', cioè coincide con $S \vee S'$.
(ii) Poniamo s= dim S e s'= dim S'. Siano $P_0, \ldots, P_s$ punti indipendenti di S e $Q_0, \ldots, Q_{s'}$ punti indipendenti di S'. Poiché $S \vee S'$ deve coincidere con il sottospazio generato da $P_0, \ldots, P_s$ e $Q_0, \ldots, Q_{s'}$, si trova la tesi. □

Corollario 2.2.10. Formula di Grassmann negli spazi affini
Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e siano S e S' sottospazi affini di $\mathbb{A}$. Allora
(i)

$$\dim S \vee S' \leq \dim S + \dim S' + 1$$

(ii) Se $S \cap S' \neq \emptyset$, allora

$$\dim S \vee S' + \dim S \cap S' = \dim S + \dim S';$$

in particolare, se in (i) vale l'uguaglianza si deve avere $S \cap S' = \emptyset$.

Dimostrazione. (i) Segue direttamente dalla proposizione 2.2.9 (ii).
(ii) È conseguenza diretta della proposizione 2.2.9 (i) e della formula di Grassmann per gli spazi vettoriali (cf. [1], Teorema 7.15). Quanto alla seconda asserzione, notiamo che, se $\dim S \vee S' = \dim S + \dim S' + 1$ e se fosse $S \cap S' \neq \emptyset$, avremmo $\dim S \vee S' = \dim S + \dim S' - \dim (S \cap S') \leq \dim S + \dim S'$, una contraddizione. □

Esempio 2.2.11. Ritorniamo all'esempio 2.2.2. Se si verifica la circostanza (3), cioè una retta S interseca in un unico punto un sottospazio affine S', allora si ha dim $S \vee S'$ = dim S' + 1. In particolare due rette che hanno un solo punto in comune generano un piano. Una retta e un piano aventi in comune un punto generano uno spazio di dimensione 3, ecc.
Nell'esempio 2.2.3 invece, se si verifica la (2), cioè l'iperpiano S non contiene un sottospazio S', allora dim $S \vee S'$ = n, ossia S e S' generano tutto $\mathbb{A}$.

Lo studio della relazione tra sottospazi di $\mathbb{A}$ suggerisce alcune definizioni:

Definizione 2.2.12. Due sottospazi S e S' di $\mathbb{A}$ si dicono *paralleli* se la giacitura di S è contenuta in quella di S' o la giacitura di S' è contenuta in quella di S. In particolare ciò accade se S contiene S' (o viceversa); in tal caso S e S' si dicono *impropriamente paralleli*, mentre si dicono *propriamente paralleli* se sono paralleli ma non accade che uno dei due contenga l'altro.

Applicandola ai sottospazi dello spazio $\mathbb{E}$ della geometria euclidea, la definizione 2.2.12 restituisce quella di parallelismo nella geometria euclidea.

Ciascun punto è parallelo a ogni altro sottospazio e $\mathbb{A}$ stesso gode della medesima proprietà. Inoltre due rette sono parallele se e solo se hanno vettori direttori proporzionali (cf. definizione 2.1.5).

Esempio 2.2.13. Due rette parallele distinte sono complanari. Una retta ed un piano propriamente paralleli generano uno spazio di dimensione 3. Anche due piani paralleli e distinti generano uno spazio di dimensione 3.

Definizione 2.2.14. Due sottospazi S e S' di $\mathbb{A}$ non paralleli si dicono *sghembi* se $S \cap S' = \emptyset$, mentre si dicono *incidenti* (lungo $S \cap S'$) se $S \cap S' \neq \emptyset$. Due sottospazi (sghembi) di dimensione finita si dicono *totalmente sghembi* se vale la relazione:

$$\dim S \vee S' = \dim S + \dim S' + 1\,,$$

Osservazione 2.2.15. Per il corollario 2.2.10, due rette r e r' stanno sempre in uno spazio affine di dimensione $n \leq 3$. Per discutere la posizione relativa di due rette, possiamo quindi limitarci a studiare uno spazio affine di dimensione 3. (cf. par. 2.4)

Esempio 2.2.16. Siano $P_0, \dots, P_s$ punti indipendenti di uno spazio affine $\mathbb{A}$. Sia t un intero tale che $0 < t < s$. Sia S il sottospazio generato da $P_0, \dots, P_t$ e S' quello generato da $P_t, \dots, P_s$. Questi due sottospazi sono totalmente sghembi. Infatti il sottospazio generato da S e S' coincide con quello generato dai punti $P_0, \dots, P_s$ e quindi

$$\dim\, S + \dim\, S' + 1 = i + (s - t - 1) + 1 = s = \dim\, (S \vee S') \tag{2.8}$$

Diamo invece un esempio di due sottospazi sghembi, ma non totalmente sghembi. In uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione 4 su un campo $\mathbb{K}$ consideriamo due sottospazi vettoriali $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}'$ di dimensione 2 tali che $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}'$ abbia dimensione 1. Scegliamo poi un vettore $\mathbf{v} \in V \setminus (\mathbf{W} + \mathbf{W}')$. E' allora chiaro che $(\mathbf{v} + \mathbf{W}) \cap \mathbf{W}' = \emptyset$. D'altra parte $\mathbf{v} + \mathbf{W}$ e $\mathbf{W}'$ sono sghembi perché $\mathbf{W} \neq \mathbf{W}'$. Tuttavia abbiamo

$$\dim\, (\mathbf{v} + \mathbf{W}) + \dim\, \mathbf{W}' + 1 = 5 > 4 = \dim\, \mathbf{V} \geq \dim\, [(\mathbf{v} + \mathbf{W}) \vee \mathbf{W}'] \tag{2.9}$$

Dunque $\mathbf{v} + \mathbf{W}$ e $\mathbf{W}$ sono sghembi, ma non totalmente sghembi.

2.3 Equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ e ne sia $S = P + \mathbf{W}$ un sottospazio di dimensione finita m. Se $R' = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ è un riferimento di $\mathbf{W}$, rimane individuato il riferimento cartesiano affine $\mathcal{R} = (Q, R')$ di S e dunque la corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{rcl}\varphi : & \mathbb{A}^m & \to S \\ & (t_1, \ldots, t_m) & \mapsto Q + (t_1\mathbf{w}_1 + \ldots + t_m\mathbf{w}_m)\end{array}$$

che assegna le coordinate $(t_1, \ldots, t_m)$ al punto

$$Q = P + (t_1\mathbf{w}_1 + \ldots + t_m\mathbf{w}_m) \tag{2.10}$$

di S ; osserviamo che, al variare di $(t_1, \ldots, t_m)$ in $\mathbb{K}^m$, il punto Q di cui alla formula (2.10) descrive tutto S.

Supponiamo ora (e manterremo queste scelte in tutto il paragrafo) che anche $\mathbb{A}$ abbia dimensione finita n e che in esso sia fissato un riferimento $\mathcal{R} = (O, R)$ di $\mathbb{A}$. Sia $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^n$ il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}$ del punto P e continuiamo, anche se impropriamente, a denotare con $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ i vettori numerici d'ordine n delle componenti in R dei vettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$. Se $\mathbf{x}$ è il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}$ del punto Q variabile in S, la (2.10) si traduce nella relazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t_1\mathbf{w}_1 + \ldots + t_m\mathbf{w}_m \tag{2.11}$$

detta *rappresentazione parametrica vettoriale* di S. Esplicitamente, posto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{w}_i = (\mathbf{w}_{i1}, \ldots, \mathbf{w}_{in})$, $i = 1, \ldots, m$, questa relazione si legge come

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_1\mathbf{w}_{11} + \ldots + t_m\mathbf{w}_{m1} \\ x_2 = p_2 + t_1\mathbf{w}_{12} + \ldots + t_m\mathbf{w}_{m2} \\ \ldots \\ x_n = p_n + t_1\mathbf{w}_{1n} + \ldots + t_m\mathbf{w}_{mn} \end{cases} \tag{2.12}$$

detta *rappresentazione parametrica* del sottospazio S.

Definizione 2.3.1. Le espressioni (2.12), che al variare di $(t_1, \ldots, t_m)$ in $\mathbb{K}^m$ danno le coordinate di tutti e soli i punti di S, si dicono *equazioni parametriche* di S nel riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, e $t_1, \ldots, t_m$ si dicono i *parametri della rappresentazione parametrica* (2.12) .

Più in generale, possiamo utilizzare vettori non necessariamente linearmente indipendenti:

Definizione 2.3.2. Se $P \in \mathbb{A}$ di coordinate $\mathbf{p}$ in $\mathcal{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s \in \mathbf{V}(\mathbb{A})$, denotiamo con S l'insieme dei punti che hanno coordinate della forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t_1\mathbf{u}_1 + \ldots + t_s\mathbf{u}_s \quad \exists t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{K}. \tag{2.13}$$

Allora S è un sottospazio affine per costruzione e diciamo che (2.13) è una *rappresentazione parametrica vettoriale* di S e che $t_1, \ldots, t_s$ sono *parametri della rappresentazione parametrica*. Se $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$ sono linearmente indipendenti, i parametri si dicono *liberi*.

Sostituendo i vettori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$ con un sistema di generatori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ linearmente indipendenti del sottospazio di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ generato da $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$, si ottiene una rappresentazione dello stesso sottospazio con parametri liberi. Il numero di parametri liberi necessari per parametrizzare un sottospazio S dipende solo dalla dimensione di S e costituisce il minimo numero necessario di parametri per parametrizzare S.

Consideriamo il caso in cui S sia generato da $m+1$ punti indipendenti $P_0, \ldots, P_m$. Per la proposizione 2.2.5, si ha che

$$S = P_0 + < \mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}, \ldots, \mathbf{P_m} - \mathbf{P_0} >,$$

sicché la (2.10) diviene $P = P_0 + t_1(\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}) + \ldots + t_m(\mathbf{P_m} - \mathbf{P_0})$.
Se nel riferimento $\mathcal{R}$ i punti P_i hanno coordinate $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$, $i = 0, \ldots, m$, le equazioni parametriche assumono la forma (vettoriale)

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + \ldots + t_m(\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_0)$$

o la forma

$$\begin{cases} x_1 = p_{01} + t_1(p_{11} - p_{01}) + \ldots + t_m(p_{m1} - p_{01}) \\ x_2 = p_{02} + t_1(p_{12} - p_{02}) + \ldots + t_m(p_{m2} - p_{02}) \\ \ldots \\ x_n = p_{0n} + t_1(p_{1n} - p_{0n}) + \ldots + t_m(p_{mn} - p_{0n}) \end{cases} .$$

Esempio 2.3.3. **Rette di uno spazi affine** L'Esempio 2.1.9 è un caso particolare di rappresentazione parametrica, quando $m = 1$.

Ora cerchiamo una descrizione differente per ciascun sottospazio affine: la rappresentazione parametrica ne elenca tutti gli elementi, ma non è semplice da utilizzare quando vogliamo controllare se un punto appartiene al sottospazio parametrizzato.
Tenendo presente l'esempio 2.1.12 sappiamo che un sistema lineare in n incognite definisce, nel riferimento $\mathcal{R}$ un sottospazio affine. Motivati da questo esempio, cerchiamo di capire se è possibile ottenere ogni sottospazio in questo modo.

Definizione 2.3.4. Un sistema lineare compatibile $\mathcal{A}$ si dice un *sistema di equazioni cartesiane di* un sottospazio S *nel riferimento* $\mathcal{R}$ se S è l'insieme dei punti di $\mathbb{A}$ le cui coordinate in $\mathcal{R}$ sono soluzioni di $\mathcal{A}$. In tal caso, diremo anche che *S è rappresentato in $\mathcal{R}$ dal sistema di equazioni $\mathcal{A}$.*

Naturalmente ogni sistema $\mathcal{A}'$ equivalente ad $\mathcal{A}$ rappresenta il sottospazio S. Eventualmente sostituendo $\mathcal{A}$ con un sistema normale ad esso equivalente, possiamo sempre supporre che il sistema $\mathcal{A}$ sia costituito da equazioni linearmente indipendenti, ossia da tante equazioni quant'è la codimensione del sottospazio in $\mathbb{A}^n$.

Esempio 2.3.5. **Equazioni cartesiane di una retta** Consideriamo una retta r passante per P con vettore direttore $\mathbf{w}$. Denotiamo con $(p_1, \dots, p_n)$ le coordinate di P e con $(w_1, \dots, w_n)$ le componenti di $\mathbf{w}$ in $\mathcal{R}$. Sappiamo che un punto appartiene a r se e solo se la sue coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ sono della forma $x_1 = p_1 + tw_1, \dots, x_n = p_n + tw_n$ per un opportuno $t \in \mathbb{K}$, cioè se e solo se i vettori numerici $(x_1 - p_1, \dots, , x_n - p_n)$ e $(w_1, \dots, w_n)$ sono proporzionali. Uno fra gli elementi della n-pla $(w_1, \dots, w_n)$ è non nullo; se supponiamo sia $w_1 \neq 0$, possiamo ricavare che $t = \frac{x_1 - p_1}{w_1}$ e mostriamo che la retta r è rappresentata dal sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} w_2(x_1 - p_1) - w_1(x_2 - p_2) = 0 \\ w_3(x_1 - p_1) - w_1(x_3 - p_3) = 0 \\ \dots \\ w_n(x_1 - p_1) - w_1(x_n - p_n) = 0 \end{cases},$$

cioè le coordinate dei punti della retta sono le soluzioni del sistema. Inoltre, questo è un sistema normale di equazioni cartesiane per la retta r. Similmente si procede se invece di essere $w_1 \neq 0$, è diversa da zero qualche altra componente di $\mathbf{w}$. Osserviamo che la condizione di proporzionalità imposta equivale alla richiesta che

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = 1 \tag{2.14}$$

Se $w_1, \dots, w_n$ sono tutti non nulli, la (2.14) può essere scritta nella forma

$$(x_1 - p_1)/w_1 = (x_2 - p_2)/w_2 = \dots = (x_n - p_n)/w_n \tag{2.15}$$

che prende il nome di *equazioni della retta* r *sotto forma di rapporti uguali.*
Se $w_i \neq 0$, l'equazione matriciale (2.14) è soddisfatta se e solo se tutti gli orlati di w_i nella matrice che compare in (2.14) sono nulli. Ritroviamo il sistema precedente e l'informazione che *ogni retta può essere rappresentata un sistema di $n-1$ equazioni lineari.*
Ad esempio, in un piano affine consideriamo il punto P di coordinate $(2, 3)$ in un riferimento assegnato. L'equazione della retta r passante per P e avente numeri direttori $(3, 7)$ è, nella forma dei rapporti uguali

$$(x - 2)/3 = (y - 3)/7$$

da cui si deduce subito l'equazione cartesiana

$$7x - 3y - 5 = 0$$

La teoria dei sistemi lineari assicura, più in generale, che *un sottoinsieme S di $\mathbb{A}$ è un sottospazio affine se e solo se esiste un sistema lineare compatibile $\mathcal{A}$ di equazioni in n incognite tale che S sia l'insieme dei punti di $\mathbb{A}$ le cui coordinate in $\mathcal{R}$ sono soluzione di $\mathcal{A}$.*
Ad esempio un iperpiano di $\mathbb{A}$ si rappresenta con un'equazione lineare del tipo

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a = 0$$

con $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Questa equazione è determinata a meno di un fattore di proporzionalità. In particolare, come visto nell'esempio 2.1.11, una retta in un piano affine si rappresenta in un dato riferimento con una equazione del tipo $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$, mentre un piano in uno spazio affine di dimensione 3 in un dato riferimento con una equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Osservazione 2.3.6. In generale, in un dato riferimento, un sottospazio S di dimensione m può essere rappresentato con un sistema normale $\mathcal{A}$ di $n - m$ equazioni lineari indipendenti, e questo è il minimo numero di equazioni che rappresenta S. Quindi *ogni sottospazio S di dimensione m è intersezione di (almeno) $n - m$ iperpiani.*

Ad esempio una retta in uno spazio affine di dimensione 3 in un dato riferimento $\mathcal{R}$ può essere rappresentata con un sistema compatibile del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti abbia rango 2 (sicché quindi anche la matrice completa ha rango 2 e il sistema risulta normale). Ciò corrisponde al fatto che la retta è intersezione di due piani. Questa coppia di piani, così come il sistema che rappresenta la retta, non è univocamente individuata.

Esempio 2.3.7. Consideriamo le equazioni parametriche (2.12) di un sottospazio S. Un punto X di $\mathbb{A}$, di vettore delle coordinate $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ appartiene a S se e solo se il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ dipende linearmente dal sistema di vettori $[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]$. Ciò equivale a dire che la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{p} \\ \mathbf{w}_1 \\ \ldots \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \ldots & x_n - p_n \\ w_{11} & \ldots & w_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m1} & \ldots & w_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

di tipo $(m + 1, n)$ su $\mathbb{K}$, ha rango $\leq m$. Ma poiché questa matrice ha almeno rango m in quanto le sue ultime m righe sono linearmente indipendenti, la condizione affinché X stia in S si può esprimere scrivendo

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \ldots & x_n - p_n \\ w_{11} & \ldots & w_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m1} & \ldots & w_{mn} \end{pmatrix} = m. \tag{2.17}$$

Questa si dice una *equazione matriciale del sottospazio S*. Da essa si può dedurre un sistema di equazioni cartesiane di S (cf. par. *2.6* dei complementi). In particolare, *quando $m = n - 1$, cioè S è un iperpiano, la condizione (2.17) equivale all'annullarsi del determinante della matrice (2.16)*:

$$det \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{(n-1),1} & \dots & w_{(n-1),n} \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando tale determinante per Laplace rispetto alla prima riga, si vede che l'equazione ottenuta è lineare.

Esempio 2.3.8. **Numeri direttori di una retta di cui siano assegnate le equazioni cartesiane** Ad una retta del piano di equazione

$$ax + by + c = 0$$

(con a e b non entrambi nulli) ha numeri direttori dati da $(-b, a)$. Una retta dello spazio di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

ha numeri direttori dati da

$$\left(\det \begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\right).$$

2.4 Sottospazi dello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3$

In $\mathbb{A}^3$, i sottospazi propri sono i punti, le rette e i piani. Supponiamo assegnato un riferimento $\mathcal{R}$.
Consideriamo un piano π di giacitura $\mathbf{W}$. Fissato un riferimento $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ di $\mathbf{W}$, denotiamo con (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}) il vettore delle componenti di $\mathbf{w}_i$ nel riferimento fissato $(i = 1, 2)$. Se $P(\mathbf{p}) \in \pi$, possiamo scegliere come equazioni parametriche di π

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{w}_1 + s\mathbf{w}_2 \tag{2.18}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$. Se $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, tali equazioni si scrivono (in forma scalare)

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + tw_{11} + sw_{21} \\ x_2 = p_2 + tw_{12} + sw_{22} \\ x_3 = p_3 + tw_{13} + sw_{23} \end{cases} \tag{2.19}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$. In particolare se P, $A(\mathbf{a})$ e $B(\mathbf{b})$ sono punti non allineati, il piano π per P, A, B ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(a_1 - p_1) + s(b_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(a_2 - p_2) + s(b_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + t(a_3 - p_3) + s(b_3 - p_3) \end{cases} \tag{2.20}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$ (avendo posto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ come di consueto).

Una equazione cartesiana del piano π di equazione parametrica (7.7) si trova calcolando il determinante

$$\begin{aligned} 0 &= det\begin{pmatrix} x_1-p_1 & x_2-p_2 & x_3-p_3 \\ w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{12} \end{pmatrix} \\ &= (x_1-p_1)(w_{12}w_{12}-w_{13}w_{22})-(x_2-p_2)(w_{11}w_{12}-w_{13}w_{21})+ \\ &\quad +(x_3-p_3)(w_{11}w_{22}-w_{12}w_{21}). \end{aligned}$$

Infatti, il punto $X(\mathbf{x})$ appartiene a π se e solo se il vettore $\mathbf{PX}$ appartiene alla giacitura $\mathbf{W}$, cioè se e solo se $\mathbf{PX}$ è linearmente dipendente da $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$.

Viceversa, una equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ (con a, b, c non tutti nulli) è l'equazione cartesiana di un piano π. I vettori della giacitura di π sono tutti e soli i vettori le cui componenti nel riferimento fissato siano soluzione dell'equazione omogenea associata $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$.

Consideriamo ora una retta r. Si dicono *numeri direttori* di r in $\mathcal{R}$ le componenti in $\mathcal{R}$ di un qualunque vettore direttore di r. I numeri direttori di una retta non sono univocamente determinati, ma differiscono tra loro per un fattore di proporzionalità non nulla. Se $P(\mathbf{p})$ e $Q(\mathbf{q})$ sono punti distinti di r, una terna di numeri direttori di r è data dalle componenti di $\mathbf{p}-\mathbf{q}$. Se $\mathbf{w} \in \mathbb{K}^3$ è una terna di numeri direttori di r, delle equazioni parametriche di r si scrivono come

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{w} \tag{2.21}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$. Se $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, tali equazioni si scrivono (in forma scalare)

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + tw_1 \\ x_2 = p_2 + tw_2 \\ x_3 = p_3 + tw_3 \end{cases} \tag{2.22}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$. In particolare se $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, la retta r per P e Q ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(p_1 - q_1) \\ x_2 = p_2 + t(p_2 - q_2) \\ x_3 = p_3 + t(p_3 - q_3) \end{cases} \tag{2.23}$$

al variare di t in $\mathbb{K}$. Chiaramente P si riottiene dando il valore 0 al parametro t e Q dando il valore -1 al parametro t.

Eliminando il parametro t dalle equazioni parametriche, ogni retta in uno spazio affine di dimensione 3 viene descritta in un dato riferimento da una coppia di equazione del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

con matrice dei coefficienti di rango 2.

Esempio 2.4.1. Considera i punti $P(1, 0, 8)$, $Q(8, 3, 2)$, $T(5, 23, 1)$, dove le coordinate si riferiscono ad un dato riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbb{A}$. La retta r per i punti P e Q ha una rappresentazione parametrica in $\mathcal{R}$ data da

$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = +3t \\ z = 8 - 6t \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Inoltre i tre punti sono indipendenti. Infatti T non appartiene alla retta r in quanto il sistema

$$\begin{cases} 5 = 1 + 7t \\ 23 = +3t \\ 1 = 8 - 6t \end{cases}$$

non ha soluzioni in t. Il piano generato dai tre punti ha una rappresentazione parametrica data da

$$\begin{cases} x = 1 + 7t - 4s \\ y = +3t - 23s \\ z = 8 - 6t + 7s \end{cases}$$

al variare di (t, s) in $\mathbb{R}^2$.

Esempio 2.4.2. Ora considera il punto P di coordinate $(2, 3, 0)$ e le due rette r e r' di rappresentazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5t \\ z = 9 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 6t \\ y = 7 + 9t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{rispettivamente}$$

Il piano π per P e parallelo a tali due rette ha giacitura generata dalle giaciture di r e r', e pertanto una sua equazione cartesiana è

$$\det \begin{pmatrix} x - 2 & y - 3 & z \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

che esplicitamente si scrive

$$-86x + 2y + 18z + 166 = 0$$

La retta per P e parallela a r ha equazioni

$$(x - 2)/2 = (y - 3)/5 = z/9$$

nella forma dei rapporti uguali. Un sistema di equazioni cartesiane è dato da

$$(x - 2)/2 = (y - 3)/5, (x - 2)/2 = z/9$$

ossia da

$$5x - 2y - 4 = 0, 9x - 2z - 18 = 0.$$

Esercizi svolti

SOTTOSPAZI DI UNO SPAZIO AFFINE

Problema 2.1. *In* $\mathbb{R}^3$, *considera il sottospazio*

$$\mathbf{W} = \{(x_1, x_2, x_3) | \, x_1 + x_3 = 0\}.$$

a) Descrivi i punti di $(1, 1, 0) + \mathbf{W}$ *in* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.
b) Fissati i punti $P(1, 2, 0)$ *e* $Q(0, 2, 1) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, *controlla se* $P + \mathbf{W}$ *e* $Q + \mathbf{W}$ *coincidono.*

Soluzione. a) Il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema $x_1 + x_3 = 0$ ha dimensione 2 e una sua base è data da $\mathbf{w}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 0)$. I punti di $(1, 1, 0) + \mathbf{W} \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sono tutti e soli i punti:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 1+t \\ -s \end{pmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

b) Per confrontare i sottospazi $P + \mathbf{W}$ e $Q + \mathbf{W}$, osserviamo che essi hanno la stessa giacitura. Applicando la proposizione 2.1.2, sappiamo che i sottospazi $P + \mathbf{W}$ e $Q + \mathbf{W}$ coincidono se e solo se $Q \in P + \mathbf{W}$, cioè $\mathbf{PQ} \in \mathbf{W}$. Poiché effettivamente $\mathbf{PQ} = (-1, 0, 1) = -\mathbf{w}_1 \in \mathbf{W}$, i due sottospazi coincidono.

Problema 2.2. *Determina la dimensione e la giacitura dei seguenti sottospazi affini:*
a) $S = P + \mathbf{W} \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *ove* $P(3, 2, 1)$ *e* $\mathbf{W}$ *sia il sottospazio di* $\mathbb{R}^3$ *generato da* $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1)^t$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)^t$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0)^t$.
b) $S = P + \mathbf{W} \subseteq \mathbb{A}^5_{\mathbb{R}}$ *ove* $P(0, 1, 1, 0, 0)$ *e* $\mathbf{W}$ *sia il sottospazio di* $\mathbb{R}^5$ *generato da* $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, 0, 1)^t$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 0, 1, 1)^t$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 0, 0)^t$.

Soluzione. a) Per la definizione 2.1.4, la dimensione di S è la dimensione dello spazio vettoriale reale che ne costituisce la giacitura, cioè la dimensione di $\mathbf{W}$ come spazio vettoriale reale. Tale dimensione coincide anche con il massimo numero di vettori linearmente indipendenti nel sistema di generatori $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. I vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti, perché non sono proporzionali. Poichè $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, dim $\mathbf{W}$ = dim $S = 2$.
b) Come nell'esempio precedente, la dimensione di S coincide con la dimensione di $\mathbf{W}$, che a sua volta coincide con il rango della matrice le cui righe sono i generatori di $\mathbf{W}$. Osserviamo che

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

Quindi dim S =3.

Problema 2.3. *Determina la dimensione e un sistema di generatori per la giacitura del sottospazio affine di* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *definito da*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) |\, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 5x_2 = 7\}.$$

Soluzione. Il sistema lineare $2x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 5x_2 = 7$ è compatibile in base al teorema di Rouchè-Capelli, perché la matrice dei coefficienti $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ e la matrice completa $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso rango. Le soluzioni dipendono da $3 - rg(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$ parametro libero, e dunque S ha dimensione 1 (pari alla dimensione della sua giacitura). La giacitura di S è data dalle soluzioni del sistema omogeneo associato: $2x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 5x_2 = 0$ e coincide con il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $(-5, 1, 9)$. Per ricavare un generatore della giacitura, basta calcolare i minori 2×2 (con segno) di $\mathbf{A}$.

CONDIZIONI DI INDIPENDENZA DI PUNTI

Problema 2.4. Condizioni di dipendenza e indipendenza di punti *Sia* $\mathbb{A}$ *uno spazio affine di dimensione* n *su* $\mathbb{K}$ *e ne sia* $\mathcal{R}$ *un riferimento cartesiano. Dati dei punti* $P_0, \ldots, P_m$ *in* $\mathbb{A}$*, aventi in* $\mathcal{R}$ *coordinate* $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$*,* $i = 0, \ldots, m$*, sia* S *il sottospazio generato da* $P_0, \ldots, P_m$*. Considera la matrice di tipo* (m, n) *su* $\mathbb{K}$ *definita da:*

$$\mathbf{M}(P_0, \ldots, P_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{p_1} - \mathbf{p_0} \\ \mathbf{p_2} - \mathbf{p_0} \\ \cdots \\ \mathbf{p_m} - \mathbf{p_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} - p_{01} & \cdots & p_{1n} - p_{0n} \\ p_{21} - p_{01} & \cdots & p_{2n} - p_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} - p_{01} & \cdots & p_{mn} - p_{0n} \end{pmatrix}.$$

Mostra che $\dim S$ *è pari al rango della matrice* $\mathbf{M}(P_0, \ldots, P_m)$*:*

$$\dim S = rg\, \mathbf{M}(P_0, \ldots, P_m).$$

In particolare i punti sono

$$\textit{allineati se e solo se } rg(\mathbf{M}(P_0, \ldots, P_m)) \leq 1$$

$$\textit{complanari se e solo se } rg(\mathbf{M}(P_0, \ldots, P_m)) \leq 2$$

e così via. I punti sono indipendenti se e solo se

$$rg\, \mathbf{M}(P_0, \ldots, P_m) = m.$$

Soluzione. Per la Proposizione 2.2.5, la giacitura di S è generata dai vettori $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}, \ldots, \mathbf{P_m} - \mathbf{P_0}$.

Problema 2.5. *Nelle notazioni dell'esercizio precedente, supponi che i punti* $P_0, \ldots, P_m$ *siano indipendenti. Mostra che una descrizione del sottospazio* S *da essi generato si ottiene scrivendo:*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x_1 - p_{01} & \dots & x_n - p_{0n} \\ p_{11} - p_{01} & \dots & p_{1n} - p_{0n} \\ p_{21} - p_{01} & \dots & p_{2n} - p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} - p_{01} & \dots & p_{mn} - p_{0n} \end{pmatrix} = m$$

In particolare, nel caso $m = n - 1$, e dunque il sottospazio generato dai punti sia un iperpiano, una sua equazione cartesiana è data da

$$\det\begin{pmatrix} x_1 - p_{01} & \dots & x_n - p_{0n} \\ p_{11} - p_{01} & \dots & p_{1n} - p_{0n} \\ p_{21} - p_{01} & \dots & p_{2n} - p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} - p_{01} & \dots & p_{mn} - p_{0n} \end{pmatrix} = 0$$

Questa equazione può essere equivalentemente scritta nel seguente modo:

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & 1 \\ p_{01} & \dots & p_{0n} & 1 \\ p_{11} & \dots & p_{1n} & 1 \\ p_{21} & \dots & p_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ p_{m1} & \dots & p_{mn} & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Soluzione. La giacitura di S è generata dai vettori $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}, \dots, \mathbf{P_m} - \mathbf{P_0}$. Per quanto visto nell'esercizio precedente, i punti sono indipendenti se e solo se

$$rg\mathbf{M}(P_0, \dots, P_m) = m.$$

Per ottenere un sistema di equazioni matriciali del sottospazio generato da $P_0, \dots, P_m$ si procede come nel n. 3, in quanto tale sottospazio è quello passante per il punto $Q = P_0$ e ha la giacitura generata dal sistema linearmente indipendente di vettori $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}, \dots, \mathbf{P_m} - \mathbf{P_0}$.

(a) La retta per i punti $P(2, 3)$ e $Q(7, 2)$ ha equazione

$$\det\begin{pmatrix} x - 2 & y - 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.24)$$

e cioè

$$x + 5y - 17 = 0 \qquad (2.25)$$

(b) La retta per i punti $P(2, 3, 0)$ e $Q(1, 1, 1)$ ha equazioni

$$(x - 2)/1 = (x - 3)/2 = -z \qquad (2.26)$$

in quanto una terna di numeri direttori della retta è data dalle differenze delle coordinate di P e Q.
(c) Il piano per i punti P, Q e $R(0, 3, 1)$ ha equazione data da

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.27}$$

ossia

$$4x + y + 3z - 7 = 0 \tag{2.28}$$

Si ricordi l'Esempio 2.3.8.

INTERSEZIONE E SPAZIO CONGIUNGENTE

Problema 2.6. *Determina l'intersezione dei sottospazi affini S e T di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$:*

$$S = \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} ; T = \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre dimensione e giacitura di tale intersezione.

Soluzione. L'intersezione cercata corrisponde al sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

ottenuto considerando sia le equazioni di S che quelle di T. Tale sistema è compatibile in base al teorema di Rouché-Capelli, perchè il rango della matrice completa $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e della matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ coincidono. Una forma ridotta della matrice C è data da $C' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e il suo rango è 3: ne ricavo che le soluzioni del sistema (2.62) dipendono da $4 - 3 = 1$ parametro libero, e dunque l'intersezione cercata ha dimensione 1. Risolvendo il sistema ridotto avente C' per matrice completa, si ricava che i punti dell'intersezione $S \cap T$ sono tutti e soli quelli che hanno coordinate della forma $(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}t, -t, -\frac{3}{2}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, mentre la giacitura (che è data dalle soluzioni del sistema omogeneo associato) è il sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{R}^4$ generato da $(5, -8, -12, 8)$.

Problema 2.7. Caratterizzazione delle rette sghembe in uno spazio di dimensione 3 *Mostrare che due rette $r = P + < \mathbf{v} >$ e $s = Q + < \mathbf{w} >$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono sghembe se e solo se i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ sono linearmente indipendenti.*

Soluzione. I tre vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un sottospazio vettoriale $\mathbf{W}$ di $\mathbb{R}^3$ che contiene ciascuno di essi: lo spazio $\mathbf{W}$ coincide con il sottospazio generato dai tre vettori, a meno che essi generino un sottospazio di dimensione 1, cioè le due rette coincidano. Allora il piano α per P di giacitura $\mathbf{W}$ contiene sia r (perché $P \in \alpha$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$) che s (perché $Q = P + \mathbf{P} - \mathbf{Q} \in \alpha$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$), che non possono essere sghembe.

Problema 2.8. Mutua posizione di due rette. *Sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$. Siano assegnate inoltre due rette r e r'; supponiamo r sia rappresentata in $\mathcal{R}$ dal sistema normale*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

e r' dal sistema

$$\begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases}.$$

Possono verificarsi i seguenti casi:
i) $r \cap r' \neq \emptyset \Leftrightarrow$ o $r = r'$ oppure $r \cap r'$ è un punto, ossia r e r' sono incidenti;
ii) $r \cap r' = \emptyset \Leftrightarrow$ o r è propriamente parallela a r' oppure r e r' sono sghembe.

Determina condizioni sui sistemi di equazioni di r e r' corrispondenti a ciascun caso. Esibisci almeno un esempio per ciascun caso.

Soluzione. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

e ne sia $\mathbf{A}$ la matrice completa e $\mathbf{A}'$ quella incompleta. Notiamo che $\operatorname{rg}(\mathbf{A}') \geq 2$, in quanto i due sistemi che rappresentano r e r' sono normali, e dunque le rispettive matrici complete hanno rango 2.
i) Accade che $r \cap r' \neq \emptyset$ se e solo se il sistema (2.30) è compatibile e dunque se e solo se $\operatorname{rg}(\mathbf{A}') = \operatorname{rg}(\mathbf{A})$. Precisamente si ha
a) $r = r' \Leftrightarrow \operatorname{rg}(\mathbf{A}') = \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 2$;
b) r e r' sono incidenti in un punto $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(\mathbf{A}')= \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 3$.
ii) Invece $r \cap r' = \emptyset$ se e solo se $\operatorname{rg}(\mathbf{A}') \neq \operatorname{rg}((\mathbf{A})$ e precisamente
c) r propriamente parallela a $r' \Leftrightarrow \operatorname{rg}(\mathbf{A}') = 2, \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 3$;
d) r e r' sono sghembe $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(\mathbf{A}') = 3, \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 4$.
Riassumendo possiamo affermare che:

(1) la condizione affinché r e r' siano (propriamente o impropriamente) parallele è che $\operatorname{rg}(\mathbf{A}') = 2$;

(2) la condizione di incidenza tra r e r' è che $\operatorname{rg}(\mathbf{A}') = \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 3$;

(3) la condizione di complanarità tra r e r' (che equivale alla incidenza ovvero al parallelismo) è che $\operatorname{rg}(\mathbf{A}') < 4$ ossia $\det \mathbf{A} = 0$;

(4) equivalentemente la condizione affinché r e r' siano sghembe si traduce nella condizione $\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = 4$ ossia $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Problema 2.9. *Controlla se i punti* $P_0(1,-1,2)$, $P_1(0,1,-3)$, $P_2(1,0,-1)$, $P_3(1,1,-4)$ *di* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *sono complanari.*

Soluzione. Sia W il sottospazio generato da $\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0} = (-1,2,-5)$, $\mathbf{P_2} - \mathbf{P_0} = (0,1,-3)$, $\mathbf{P_3} - \mathbf{P_0} = (0,2,-6)$. I quattro punti sono complanari se e solo se $\dim W \leq 2$. Poiché $\dim W = rg \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} = 2$, i punti sono complanari.

EQUAZIONI DEI SOTTOSPAZI

Negli esercizi seguenti, si suppone fissato un sistema di riferimento.

Problema 2.10. *In uno spazio affine di dimensione 3, determina i numeri direttori della retta di equazioni*

$$\begin{cases} 3x - 2z + 5 = 0 \\ -x + y + 6z + 11 = 0 \end{cases}.$$

Soluzione. Si usa la formula nell'Esempio 2.3.8, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. I numeri direttori di r sono dati da

$$\left(\det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, -det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (2, -16, 3).$$

□

Problema 2.11. Retta per due punti assegnati *Nel piano affine* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, *determina equazioni parametriche e equazione cartesiana della retta s passante per* $R(-2,5)$ *e* $S(1,6)$.

Soluzione. Avendo osservato che $\mathbf{OS} - \mathbf{OR} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, come equazioni parametriche di r posso prendere:

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 3\,t \\ x_2 = 5 + \,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ne ricavo l'equazione cartesiana $x_1 = -2 + 3\,(x_2 - 5)$, cioè $x_1 - 3\,x_2 + 17 = 0$.

Problema 2.12. Retta per un punto, con direzione assegnata *Nel piano affine* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, *determina equazioni parametriche per la retta r passante per* $P(1,-3)$ *e di vettore direttore* $\mathbf{v} = -7\mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\,\mathbf{e}_2$.

Soluzione. Ad esempio, come equazioni parametriche di r posso prendere:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 7t \\ x_2 = -3 + \sqrt{2}\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Problema 2.13. Passaggio da equazioni parametriche e equazioni cartesiane *Nel piano affine* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*, determina l'equazione cartesiana per ciascuna delle rette:*

$$r : \begin{cases} x_1 = t + 2 \\ x_2 = 3 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad e \quad s : \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 + 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Soluzione. Una equazione cartesiana per r, ricavata eliminando il parametro t, è data da $x_2 = 3 + 6(x_1 - 2)$ cioè da $6x_1 - x_2 - 9 = 0$. Una equazione cartesiana per s è data da $x_1 = 5$, che si ricava in modo immediato dalle equazioni parametriche osservando che una delle due espressione non contiene il parametro t.

Problema 2.14. Passaggio da equazioni cartesiane a parametriche *Nel piano affine* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*, determina equazioni parametriche per la retta* r *di equazione cartesiana* $2x_1 + x_2 - 5 = 0$ *(risp., per la retta* s *di equazione cartesiana* $x_2 = -3$*).*

Soluzione. Calcolando le soluzioni di ciascuna delle equazioni cartesiane delle due rette, ricavo le rispettive equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 5 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,, \text{ e} \quad s : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Problema 2.15. Retta passante per un punto dato e parallela ad una retta data *In* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*, determina equazioni parametriche per la retta* s *passante per il punto* $P(2, -1)$ *e parallela alla retta* $r = \{(-3 + h, 4 - 5h) |\, h \in \mathbf{R}\}$.

Soluzione. La retta r ha vettore direttore $\mathbf{v} = (1, -5)$. I punti della retta s sono dunque della forma $P + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$: dunque le equazioni parametriche di s sono:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = -1 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Problema 2.16. Retta passante per un punto dato e parallela ad una retta data *In* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*, determina una equazione cartesiana per la retta* s *passante per il punto* $P(2, -1)$ *e parallela alla retta* r *definita da* $r = \{(x_1, x_2) | 3x_1 - x_2 = 1\}$.

Soluzione. La retta s ha equazione della forma $3x_1 - x_2 = d$, per un opportuno $d \in \mathbb{R}$, perchè la sua giacitura deve coincidere con la giacitura di r. Imponendo che le coordinate del punto P siano soluzione dell'equazione di s, si ricava che $3 \cdot 2 - (-1) = d$, cioè $d = 7$. Dunque s ha equazione $3x_1 - x_2 = 7$.

Gli esercizi seguenti si riferiscono allo spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Problema 2.17. *Determina i numeri direttori della retta* r *di equazioni* $r : \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ *ed equazioni per* r *nella forma dei rapporti uguali.*

Soluzione. Un vettore direttore per r si ricava dai minori, con segno alterno, della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ed è uguale a $(-6, 3, 3)$; i numeri direttori sono i suoi coefficienti. Per determinare equazioni di r nella forma dei rapporti uguali, occorre determinare un punto P della retta r: imponendo, ad esempio $x_3 = 0$, si ricava $P(7, -\frac{14}{3}, 0)$. Le equazioni cercate sono : $\frac{x_1-7}{-6} = \frac{x_2+\frac{14}{3}}{3} = \frac{x_3}{3}$, cioè $\frac{7-x_1}{6} \frac{3x_2+14}{9} = \frac{x_3}{3}$.

Problema 2.18. *In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, determina dimensione, rappresentazione parametrica e cartesiana dei sottospazi affini congiungenti rispettivamente:*

(a) $P_0(-1, 2, 1)$ *e* $P_1(1, -2, 6)$*;*
(b) $P_0(1, -1, 1)$*,* $P_1(1, 0, -1)$*,* $P_2(2, 1, 3)$*;*
(c) $P_0(1, -1, 1)$*,* $P_1(1, 0, -1)$*,* $P_2(2, 1, 3)$*,* $P_3(1, 2, 0)$*.*

Soluzione. In ciascuna domanda è possibile utilizzare il procedimento suggerito dal Problema 2.5, ricavando inizialmente le equazioni cartesiane, derivandone in seguito le equazioni parametriche. Lo svolgimento qui proposto permette di non utilizzare la nozione di determinante.
(a) Poiché i due punti sono distinti, il loro sottospazio congiungente è una retta i cui punti sono tutti e soli quelli della forma $Q = P_0 + t\mathbf{P_0P_1}$, $t \in \mathbb{R}$. Si ricavano le equazioni parametriche $x_1 = -1 + 2\,t$, $x_2 = 2 - 4\,t$, $x_3 = 1 + 5t$, $t \in \mathbb{R}$: da esse si ricavano, eliminando il parametro $t = \frac{x_1+1}{2}$, le equazioni cartesiane $x_2 = 2-2(x_1+1)$, $x_3 = 1+5\frac{x_1+1}{2}$, cioè $2x_1+x_2 = 0$, $-5x_1+2x_3 = 7$.
(b) I punti $P_0, P_1 e P_2$ sono indipendenti, perchè i vettori $\mathbf{P_0P_1} = (0, 1, -2)$ e $\mathbf{P_0P_2} = (1, 2, 2)$ sono linearmente indipendenti. Il sottospazio congiungente $P_0 \vee P_1 \vee P_2$ è pertanto un piano, i cui punti sono tutti e soli quelli della forma $Q = P_0 + t\mathbf{P_0P_1} + s\mathbf{P_0P_2}$, ove $t, s \in \mathbb{R}$. Si ricavano le equazioni parametriche $x_1 = 1+t+2\,s$, $x_2 = -1+s$, $x_3 = 1-t+3\,s$, ove $t, s \in \mathbb{R}$: da esse si ricavano, eliminando il parametro $s = x_2 + 1$ le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t + 2\,(x_2 + 1) \\ x_3 = 1 - t + 3\,(x_2 + 1) \end{cases} \text{cioè} \begin{cases} x_1 = 3 + t + 2\,x_2 \\ x_3 = 4 - t + 3\,x_2 \end{cases}$$

Eliminando ora il parametro $t = x_1 - 2x_2 - 3$, si trova l'equazione cartesiana $x_1 - 5\,x_2 + x_3 - 7 = 0$.
(c) Per il punto precedente, il sottospazio generato da P_0, P_1, P_2 ha equazione cartesiana $x_1 - 5\,x_2 + x_3 - 7 = 0$, che non è soddisfatta dalle coordinate di P_3. Ricaviamo che i quattro punti generano l'intero spazio affine, che ha equazione cartesiana $0 = 0$ e equazioni parametriche $x_1 = t_1$, $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, $x_3 = t_3$, ove $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$.

Problema 2.19. *Determina la dimensione ed un sistema di equazioni normali per il sottospazio affine* $S = \{(5+2s+3t, 3+s, -1-s+6t), s, t \in \mathbb{R}\}$ *di* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$*.*

Soluzione. La giacitura $\{(2s+3t, s, -s+6t) = s\,(2,1,-1)+t\,(3,0,6)|, s,t \in \mathbb{R}\}$ di S ha dimensione 2, e dunque $\dim S = 2$ e S è un piano. Poichè la dimensione di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ è 3, un sistema di equazioni normali per S è costituito da una equazione; per ricavare tale equazione, procedo per eliminazione dei parametri dalle equazioni parametriche di S: $x_1 = 5+2s+3t, x_2 = 3+s, x_3 = -1-s+6t$, ottenendo l'equazione cercata: $6x_1 - 15x_2 - 3x_3 + 12 = 0$. Per ricavare l'equazione cartesiana di r posso, alternativamente annullare il seguente determinante: $det \begin{pmatrix} x_1 - 5 & x_2 - 3 & x_3 + 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Problema 2.20. Retta passante per un punto dato e parallela ad una retta data *In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, determina equazioni parametriche per la retta s passante per il punto $P(-5,-1,3)$ e parallela alla retta*

$$r = \{(-3+h, 4-5h, 2h)|\, h \in \mathbb{R}\}.$$

Soluzione. Lasciando invariata la giacitura e modificando il punto di passaggio, si ricava che $s = \{(-5+h, -1-5h, 3+2h)|\, h \in \mathbb{R}\}$.

Problema 2.21. Retta passante per un punto dato e parallela ad una retta data *In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, determinare una equazione cartesiana per la retta s passante per il punto $P(-3,2,-1)$ e parallela alla retta*

$$r = \{(x_1, x_2, x_3)|3x_1 - x_2 = 1, 5x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

Soluzione. Le equazioni della retta s si ottengono da quelle della retta r modificandone solo i termini noti, in modo da ricavare equazioni soddisfatte dalle coordinate di P. La prima equazione ha forma $3x_1 - x_2 = d$, con $3 \cdot (-3) - 2 = d$, cioè $d = -11$. La seconda equazione ha forma $5x_1 - x_2 + x_3 = f$, con $5 \cdot (-3) - 2 + (-1) = f$, cioè $f = -18$. Dunque $s = \{(x_1, x_2, x_3)|3x_1 - x_2 = -11, 5x_1 - x_2 + x_3 = -18\}$.

Problema 2.22. *In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, determinare una equazione cartesiana del piano α parallelo al piano di equazione $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 = 0$ e passante per il punto medio di $A(1,0,7)$ e $B(2,-1,-4)$.*

Soluzione. In accordo con l'Esempio 1.5.9, il punto medio M di A e B ha coordinate $(\frac{1+2}{2}, \frac{0-1}{2}, \frac{7-4}{2}) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Il piano α ha equazione della forma $3x_1 + 2x_2 + x_3 = d$, ove il coefficiente d va determinato in modo che il punto M soddisfi l'equazione: poiché $3\,\frac{3}{2} - 2\,\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 4$ si ricava $d = 4$ e l'equazione è $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$.

Problema 2.23. Condizioni di parallelismo tra iperpiani. *Gli iperpiani π e π' rappresentati, rispettivamente, in $\mathcal{R}$ dalle equazioni*

$$\begin{aligned} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \\ a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a' = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

sono paralleli se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ a'_1 \dots a'_n \end{pmatrix} = 1 \tag{2.32}$$

ossia due iperpiani sono paralleli se e solo se sono rappresentati in un dato riferimento da equazioni aventi i coefficienti delle incognite proporzionali.
Se ciò accade, i due iperpiani sono propriamente paralleli se

$$rg \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \ a \\ a'_1 \dots a'_n \ a' \end{pmatrix} = 2.$$

Soluzione. Essi sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura ossia se e solo se le due equazioni

$$\begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \\ a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = 0 \end{cases}$$

sono tra loro proporzionali.

FASCI

Definizione 2.3. L'insieme degli iperpiani aventi la stessa giacitura di π si dice *fascio improprio* di iperpiani paralleli a π.

Problema 2.24. Fascio improprio di iperpiani *In uno spazio affine $\mathbb{A}$, considera un iperpiano π rappresentato, in un riferimento $\mathcal{R}$, da una equazione della forma $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a = 0$.*
Mostra che tutti e soli gli iperpiani di questo fascio hanno equazione del tipo

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + k = 0 \tag{2.33}$$

con $k \in \mathbb{K}$. La (2.33) si dice equazione del fascio improprio di iperpiani paralleli a π, *e in essa si deve intendere k come un parametro in $\mathbb{K}$, al cui variare l'iperpiano di equazione (2.33) descrive il fascio.*

Soluzione. Un iperpiano π' è rappresentato, nello stesso riferimento, dall'equazione $a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n + a' = 0$, mentre l'intersezione tra π e π' è descritta dal sistema delle equazioni dei due iperpiani. Se gli iperpiani π e π' sono paralleli, si possono presentare due possibilità: o $\pi = \pi'$ ovvero $\pi \cap \pi' = \emptyset$, caratterizzate dal fatto che sia uguale a 1 oppure a 2 il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \ a \\ a'_1 \dots a'_n \ a' \end{pmatrix} .$$

Definizione 2.4. L'insieme di tutti gli iperpiani passanti per un sottospazio S si dice *fascio proprio di asse* (o *centro*) S.

Problema 2.25. Fascio proprio di iperpiani *Se π e π' non sono paralleli allora non potendo essere sghembi (cfr. proposizione (2.5.4), si intersecano in un sottospazio S di codimensione 2 (cfr. esempio 2.2.3) che è rappresentato dal sistema normale*

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \\ a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a' = 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

In tal caso π e π' sono incidenti, il che corrisponde all'essere

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_n \\ a'_1 \ldots a'_n \end{pmatrix} = 2.$$

Un iperpiano appartiene al fascio se e solo se ha una equazione del tipo

$$\lambda(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = 0 \tag{2.35}$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Questa si dice equazione del fascio determinato da *π e π'. Ancora una volta λ e μ vanno pensati come parametri in $\mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ al variare dei quali l'iperpiano di equazione (2.35) descrive il fascio.*

Soluzione. Un iperpiano π'', di equazione

$$a''_1x_1 + \ldots + a''_nx_n + a'' = 0 \tag{2.36}$$

appartiene a tale fascio se e solo ogni soluzione del sistema (2.34) è anche soluzione di (2.36). Come risulta da [1], proposizione (9.10), ciò accade se e solo se l'equazione (2.36) dipende dal sistema (2.34).

Problema 2.26. *L'equazione (2.35) e la*

$$\lambda'(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu'(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = 0 \tag{2.37}$$

rappresentano lo stesso iperpiano se e solo (λ, μ) e (λ', μ') sono proporzionali.

Soluzione. L'equazione (2.35) e la

$$\lambda'(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu'(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = 0$$

rappresentano lo stesso iperpiano se e solo se sono proporzionali, cioè se e solo se esiste un $\rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che

$$\begin{aligned} &\lambda(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = \\ &= \rho(\lambda'(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + \mu'(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a'). \end{aligned}$$

Ciò accade se e solo se

$$(\lambda - \rho\lambda')(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a) + (\mu - \rho\mu')(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a')$$

è il polinomio nullo. Ma poiché $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a$ e $a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a'$ sono polinomi linearmente indipendenti, ciò equivale a dire che $\lambda - \rho\lambda' = \mu - \rho\mu' = 0$ ossia $(\lambda, \mu) = \rho(\lambda', \mu')$.

Dunque l'equazione

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a + \mu(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a') = 0$$

al variare di μ rappresenta tutti gli iperpiani del fascio tranne π ciascuno una sola volta.

Esempio 2.5. Consideriamo due rette r e r' del piano (caso n=2) di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

Esse sono incidenti se e solo i coefficienti delle incognite nelle due precedenti equazioni non sono proporzionali, il che accade se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$$

Le due rette si intersecano allora in un punto P le cui coordinate si ottengono risolvendo (ad esempio con la regola di Cramer) il sistema (2.38). Il fascio determinato da r e r' ha equazione

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$$

e rappresenta la famiglia di tutte le rette per P.

Problema 2.27. *Tre iperpiani π, π' e π'' di equazioni*

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n+a = 0, a'_1x_1+\ldots+a'_nx_n+a' = 0, a''_1x_1+\ldots+a''_nx_n+a'' = 0$$

appartengono ad un fascio (proprio o improprio) se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_n & a \\ a'_1 \ldots a'_n & a' \\ a''_1 \ldots a''_n & a'' \end{pmatrix} \leq 2.$$

Soluzione. Se π, π' e π'' appartengono ad un fascio proprio allora o i tre piani coincidono, e allora l'asserto è ovvio, oppure almeno due di essi sono distinti, diciamo π e π', e il terzo appartiene al fascio da essi determinato, il che vuol dire che l'ultima riga della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_n & a \\ a'_1 \ldots a'_n & a' \\ a''_1 \ldots a''_n & a'' \end{pmatrix}$$

dipende dalle prime due, da cui di nuovo segue l'asserto. Se π, π' e π'' appartengono ad uno stesso fascio improprio allora la sottomatrice $\mathbf{A}(1,2,3;1,\ldots,n)$ ha rango 1, e pertanto $\mathbf{A}$ non può avere rango 3.

Viceversa, se rg $(\mathbf{A}) \leq 2$, allora o la sottomatrice $\mathbf{A}(1,2,3;1,\ldots,n)$ ha rango 1, il che vuol dire che i tre piani appartengono ad un fascio improprio, oppure $\mathbf{A}(1,2,3;1,\ldots,n)$ ha rango 2. In tal caso il sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \\ a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n + a' = 0 \\ a''_1x_1 + \ldots + a''_nx_n + a'' = 0 \end{cases}$$

è compatibile, ma non normale, essendo equivalente al sistema formato da soltanto due delle sue equazioni linearmente indipendenti. Ma allora il sistema rappresenta un sottospazio S di codimensione 2 che è contenuto in π, π' e π'', sicché questi iperpiani appartengono al fascio di centro S.

Problema 2.28. *Nel piano tre rette di equazioni*

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0, \quad a''x + b''y + c'' = 0$$

appartengono ad un fascio proprio o improprio se e solo se

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0.$$

Gli esercizi seguenti si riferiscono allo spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Problema 2.29. *Determina il fascio di piani avente per asse la retta per i punti $A(1,2,-1)$ e $B(4,1,3)$.*

Problema 2.30. Piano per due rette incidenti *Determina dimensione, rappresentazione parametrica e cartesiana del sottospazio affine congiungente* $r: \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ *e* $s: \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$ *in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$;*

Soluzione. Il rango delle matrici completa e incompleta del sistema ottenuto considerando le equazioni cartesiane di r e di s è 3: le due rette si intersecano quindi in un solo punto e generano un piano π (di dimensione 2). La giacitura di π è generata dai vettori direttori delle due rette. Una equazione cartesiana per π può essere determinata imponendo al piano generico nel fascio di asse r, di equazione $\lambda(x_1 + 2x_3 - 2) + \mu(x_1 + 2x_2 + x_3) = (\lambda + \mu)x_1 + 2\mu x_2 + (2\lambda + \mu)x_3 - 2\lambda = 0$, il passaggio per un punto S di s che non appartiene a r, ad esempio $S(0, \frac{1}{2}, 3)$. Si ricava la condizione $\mu = 2\lambda$ e la soluzione particolare $\lambda = 1, \mu = 2$, da cui l'equazione cartesiana di π: $3\,x_1 + 4\,x_2 + 4\,x_3 - 2 = 0$ e le equazioni parametriche $x_1 = h$, $x_2 = t$, $x_3 = \frac{1}{4}[-3h - 4t + 2]$, $t, h \in \mathbb{R}$.

Per calcolare direttamente le equazioni parametriche senza passare dall'equazione cartesiana, occorreva calcolare esplicitamente il punto di intersezione $P(\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{3})$, e i vettori direttori $(-4, 1, 2)$ di r e $(1, -1, -1)$ di s. Le equazioni parametriche di π sono date quindi da: $x_1 = \frac{4}{3} - 4t + h$, $x_2 = -\frac{7}{6} + t - h$, $x_3 = \frac{1}{3} + 2t - h$, $t, h \in \mathbf{R}$. L'equazione cartesiana poteva essere ritrovata eliminando i parametri dalle equazioni parametriche.

Problema 2.31. Piano per due rette parallele *Determina una equazione cartesiana per il piano contenente le rette r e s, ove r sia la retta di equazioni parametriche $x_1 = 2 + t$, $x_2 = -1 + 2\,t$, $x_3 = 2 + 5\,t$, mentre s sia la retta di equazioni cartesiane $2x_1 - x_2 = 2$, $5x_2 - 2x_3 = 1$.*

Problema 2.32. Retta per un punto e incidente due rette sghembe *In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia fissato il punto $P(2, 1, 0)$. Determina, se esiste, una retta t per P che incida $r : \frac{x_1+3}{2} = 1 - x_2 = -2x_3$ e $s : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.*

Soluzione. Il punto P non appartiene ad r né ad s, perché non ne soddisfa le equazioni. Un sistema di equazioni cartesiane per r è dato da $x_1 + 2x_2 = -1$, $x_2 - 2x_3 = 1$. Le rette r e s sono tra loro sghembe, perché il sistema lineare ottenuto considerando sia le equazioni di r che di s, ha matrice completa di rango 4. In particolare, $r \cap s = \emptyset$. La retta t, se esiste, deve passare per P ed essere complanare con s; dunque t deve essere contenuta nel piano α per s e per P: la condizione affinché il piano

$$\lambda(2x_1 - x_2 - 1) + \mu(3x_1 + 3x_2 - x_3) = (2\lambda + 3\mu)x_1 + (3\mu - \lambda)x_2 - \mu x_3 - \lambda = 0$$

del fascio di asse s, passi per P, si ottiene sostituendo le coordinate di P ed è $2\lambda + 9\mu$: una soluzione si ottiene per $\lambda = 9, \mu = -2$; si ricava che α ha equazione $13x_1 - 15x_2 + 2x_3 - 9 = 0$. Analogamente t deve essere contenuta nel piano $\beta : x_2 - 2x_3 = 1$ del fascio di asse r e passante per P. Poiché i due piani sono distinti, si ha $t = \alpha \cap \beta$, cioè $t : 13x_1 - 15x_2 + 2x_3 - 9 = 0, x_2 - 2x_3 = 1$.

Esercizi

Per ogni esercizio, viene indicata la soluzione.

2.1. Dire se i seguenti punti di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono indipendenti:

(a) $P_1(2, 0, 1)$, $P_2(5, 1, 0)$;
(b) $P_1(0, 1, 1)$, $P_2(0, 1, -1)$, $P_3(1, 1, 7)$;
(c) $P_1(0, 1, 1)$, $P_2(0, 1, -1)$, $P_3(1, 1, 7)$, $P_4(0, 0, 1)$;
(d) $P_1(0, 1, 1)$, $P_2(0, 1, -1)$, $P_3(1, 1, 7)$, $P_4(0, 0, 1)$, $P_5(1, 0, 1)$.

2.1 (a) Indipendenti, perché distinti.
(b), (c) Indipendenti, perché $\mathbf{P_2} - \mathbf{P_1} = (0, 0, -2)$, $\mathbf{P_3} - \mathbf{P_1} = (1, 0, 6)$, $\mathbf{P_4} - \mathbf{P_1} = (0, -1, 0)$ sono linearmente indipendenti.
(d) No: 5 punti non possono essere indipendenti in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

2.2. Determina la mutua posizione delle seguenti coppie di rette in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

(a) $r = \{(2+3t, 1+5t, 3t),\ t \in \mathbb{R}\}$ e $s : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$;
(b) $r : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 7 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$;
(c) $r : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$;
(d) $r : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$.

2.2 (a) La retta r ha vettore direttore $\mathbf{v} = (3, 5, 3)$. Il vettore direttore della retta s è soluzione del sistema omogeneo $2x_1 + 2x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0$, come ad esempio $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$. Dunque le rette non sono parallele. Dunque, sono sghembe o secanti. Sostituendo le equazioni parametriche di r nelle equazioni cartesiane di s si verifica che nessun punto di r appartiene a s: dunque le due rette sono sghembe.
(b), (c) Il sistema lineare ottenuto considerando le equazioni di r e di s ha matrice dei coefficienti di rango 2 (e dunque le due rette sono parallele) e matrice completa di rango 3; dunque le due rette sono propriamente parallele.
(d) Il sistema lineare ottenuto considerando le equazioni di r e di s ha matrice completa di rango 4; dunque le due rette sono sghembe.

2.3. Determina la mutua posizione delle seguenti coppie di sottospazi affini (in caso essi siano sghembi, dire se sono totalmente sghembi; in caso siano paralleli, dire se sono propriamente o impropriamente paralleli):

(a) $\pi : x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ e $r : \begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$;
(b) $\pi : x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ e $r = \{(2+3t, 1+5t, 4),\ t \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$;
(c) $r = \{(2+3t, 1+5t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$ e $s = \{(5+3h, 6+5h, 1+h),\ h \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$;
(d) $r = \{(2+3t, 1+5t, 3t),\ t \in \mathbb{R}\}$ e $s = \{(5+h, 2-h, -1+3h),\ h \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$;
(e) $\pi = \{(2+4h+k, 1+6h+k, 3h),\ h, k \in \mathbb{R}\}$ e $r = \{(2+3t, 3t, 4),\ t \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$;
(f) $\pi : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = x_4 = 2$ e $S : \begin{cases} x_1 + 7x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$;
(g) $r : \begin{cases} x_1 + 7x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$ e $s = \{(5+h, 2-h, -1+3h, 1+h),\ h \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$.

2.3 (a) Il piano π è un iperpiano e non può essere sghembo a nessun sottospazio di dimensione positiva, in base alla proposizione 2.5.4. Poichè il sistema lineare formato dalle equazioni di π e di r ha matrice completa di rango 3 e matrice dei coefficienti di rango 2, si ricava che $\pi \cap r = \emptyset$, e i due sottospazi sono propriamente paralleli.

(b) Sostituendo le coordinate del punto generico di r nell'equazione cartesiana di π, ottengo una equazione lineare nel parametro t che che ammette una unica soluzione. Concludo che i due sottospazi sono incidenti in un punto, e che $\pi \vee r = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.
(c) Le giaciture coincidono, dunque le rette sono parallele o coincidenti. Poiché il vettore $\mathbf{S} - \mathbf{R} = (3, 5, 1)$, avente per estremi i punti $R(2, 1, 0) \in r$ e $S(5, 6, 1) \in s$, non appartiene alla giacitura comune, le due rette sono propriamente parallele.
(d) Le rette non sono parallele, perché i loro vettori direttori $\mathbf{v} = (3, 5, 3)$ e $\mathbf{w} = (1, -1, 3)$ non sono proporzionali. Poiché, inoltre, il vettore di estremi i punti $R(2, 1, 0) \in r$ e $S(5, 2, -1) \in S$ è linearmente indipendente da $\mathbf{v} = (3, 5, 3)$ e $\mathbf{w} = (1, -1, 3)$, le rette sono sghembe, e dunque totalmente sghembe.
(e) Il sottospazio π è un piano di giacitura $\mathbf{W}$ generata da $\mathbf{v} = (4, 6, 3)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$, mentre r è una retta avente $\mathbf{w}$ come vettore direttore. Dunque r e π sono paralleli, perché la giacitura di r è contenuta nella giacitura di π. Presi $R(2, 0, 4) \in r$ e $Q(2, 1, 0) \in \pi$, poiché il vettore $\mathbf{PQ} = (0, 1, -4) \notin \mathbf{W}$ si conclude che r e π sono propriamente paralleli.
(f) Il sottospazio π è un iperpiano (di dimensione 3), mentre S ha dimensione 2 ed è quindi un piano. Il sistema di equazioni lineari ottenuto considerando sia l'equazione di π che quelle di S risulta compatibile, e le sue soluzioni dipendono da un parametro libero: dunque Dunque π e S si intersecano lungo una retta.
(g) Il sottospazio s è una retta. Sostituendo l'espressione delle sue equazioni parametriche nelle equazioni cartesiane di π, si ottiene un sistema non compatibile nel parametro h di r. Dunque i due sottospazi hanno intersezione vuota. Poichè il vettore direttore di s non appartiene alla giacitura di r, si conclude che i due sottospazi sono sghembi (e dunque totalmente sghembi perché s è una retta. Si osservi che anche r è una retta.

2.4. Dire se le seguenti terne di rette di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ appartengono allo stesso fascio proprio o improprio:

$$\text{(a) } r : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}, \; s : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ e } t = \{(1+5h, 3h, 4+2h),\ h \in \mathbb{R}\};$$

$$\text{(b) } r : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \; s : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ e } t : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

2.4 (a) Osservando le equazioni, si vede che le rette r e s sono propriamente parallele. Affinché le tre rette possano appartenere ad una fascio, la retta t dovrebbe essere parallela alle prime due: ma il vettore direttore di t non soddisfa il sistema omogeneo associato alle equazioni di r (e dunque le giaciture non sono parallele, e le 3 rette non appartengono ad un fascio).
(b) Le rette r e s sono tra loro sghembe, perché ha rango 4 la matrice completa del sistema lineare ottenuto considerando sia le equazioni di r che quelle di s. Dunque non possono appartenere entrambe ad un fascio.

2.5. In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, determinare il fascio di piani avente per asse la retta r di equazioni $x_1 + 2x_2 = 2$, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

2.5 I piani del fascio hanno equazione $\lambda(x_1 + 2x_2 - 2 + \mu(x_1 + x_2 + 2x_3) = (\lambda + \mu)x_1 + (2\lambda + \mu)x_2 + 2\mu x_3 - 2\lambda$.

2.6. In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, determinare
(a) la stella $\mathcal{H}_P$ di iperpiani per il punto $P(3, 0, 1)$,
(b) il fascio di iperpiani $\mathcal{H}_r$ per la retta $r : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$,
(c) il fascio di iperpiani $\mathcal{H}_s$ per la retta $s = \{(1 - t, 1 + t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

2.6 (a) $\mathcal{H}_P : \lambda_1(x_1 - 3) + \lambda_2 x_2 + \lambda_3(x_3 - 1) = 0$;
(b) $\mathcal{H}_r : \lambda(x_1 - x_2 + x_3 - 2) + \mu(2x_1 + x_2 + 2x_3 - 1) = 0$;
(c) $\mathcal{H}_s : \lambda(x_1 + x_3 - 1) + \mu(x_2 - x_3 - 1) = 0$.

2.7. In $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, determinare
(a) la stella $\mathcal{H}_P$ di iperpiani per $P = (3, 3, 1, 1)$,
(b) la stella $\mathcal{H}_r$ di iperpiani per la retta $r = \{(1 + 3t, 1 + t, 3t, 1 + t),\ t \in \mathbb{R}\}$.
(c) gli iperpiani di $\mathcal{H}_r$ passanti per P.

2.7 (a) $\mathcal{H}_P : \lambda_1(x_1 - 3) + \lambda_2(x_2 - 3) + \lambda_3(x_3 - 1) + \lambda_4(x_4 - 1) = 0$.
(b) $\mathcal{H}_r : \lambda_1(x_1 - x_3 - 1) + \lambda_2(3x_2 - x_3 - 1) + \lambda_3(3x_4 - x_3 - 1) =$
$\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 x_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x_3 + 3\lambda_3 x_4 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$.
(c) Imponendo $\lambda_1 + 7\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, si trova il fascio di piani cercato:
$\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 x_2 - (-6\lambda_2)x_3 - 3(\lambda_1 + 7\lambda_2)x_4 + 6\lambda_2 = 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$.

2.8. In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia fissata la retta $r : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$. Determinare la retta s parallela ad r e passante per $Q(1, 0, 1)$.

2.8 $r : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 4 = 0 \end{cases}$

2.9. In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia fissata la retta $r = \{(2 - t, -3 + 2t, 1 + 3t) | t \in \mathbf{R}\}$. Determinare la retta s parallela ad r e passante per $Q(1, 0, 1)$.

2.9 $s = \{(1 - t, 2t, 1 + 3t) | t \in \mathbb{R}\}$.