5

Spazi Proiettivi

In questo capitolo viene introdotta la nozione di spazio proiettivo. Per rendere l'esposizione più flessibile e adattabile agli interessi di chi legge, nei complementi sono stati raccolti gli esempi degli spazi proiettivi numerici di dimensione 1,2,3, che possono essere letti in modo indipendente dal resto del testo (e dunque contengono parti ripetitive per chi ha letto la descrizione generale).

5.1 Considerazioni preliminari

Raccogliamo alcuni esempi che possono essere trattati più facilmente introducendo la nozione di retta proiettiva.

Nel piano (euclideo o complessificato), fissiamo un riferimento $\mathcal{R}$. Fissato un punto $P(p_1, p_2)$, consideriamo il fascio di rette $\Sigma(P)$ per P, costituito da tutte le rette passanti per P: cerchiamo di assegnare una struttura sull'insieme delle rette del fascio.

Primo modo Le rette del fascio per P sono in corrispondenza biunivoca con le giaciture delle rette, cioè con *i sottospazi di dimensione 1 dello spazio* $\mathcal{V}^2$ *dei vettori del piano.*

Secondo modo Ogni retta del fascio per P ammette una equazione cartesiana della forma

$$r_{\lambda,\mu} : \lambda(x_1 - p_1) + \mu(x_2 - p_2) = 0$$

ove la coppia (λ, μ) è individuata solo a meno di un multiplo per una costante non nulla ed è diversa dalla coppia $(0, 0)$.

Terzo modo Le rette del fascio per P sono in corrispondenza con i punti di una retta "estesa" aggiungendo un nuovo punto, come nell'esempio seguente.

Esempio 5.1.1. **Completamento proiettivo di una retta** Consideriamo una retta r non contenente il punto P. Consideriamo il fascio $\Sigma(P)$ costituito da tutte le rette passanti per P. Per ogni punto $X \in r$ noi possiamo considerare la retta r_X generata da P e da X. Possiamo allora considerare l'applicazione:

$$\begin{aligned} \iota_r : \; r &\to \Sigma(P) \\ X &\mapsto r_X . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Questa applicazione è iniettiva e permette quindi di identificare r con un sottoinsieme proprio di $\Sigma(P)$: l'immagine di ι_r contiene tutte le rette del fascio $\Sigma(P)$, tranne la retta r' passante per P e parallela ad r (che ha la stessa direzione di r). Il fascio $\Sigma(P)$ viene identificato con un nuovo oggetto (detto *retta proiettiva*), ottenuto dalla retta r aggiungendo un punto, che viene detto *punto improprio* o *punto all'infinito* e corrisponde alla direzione di r. Per distinguerli, i punti di r sono detti *punti propri*, mentre il punto improprio viene indicato con i simboli

$$r_\infty \text{ oppure } \infty.$$

Poniamo

$$r^- = r \cup \{r_\infty\};$$

altri simboli correntemente utilizzati sono $\overline{r}$ (da non confondersi con il coniugato della retta r) e $\mathbb{P}(r)$; diciamo che r^- è il *completamento proiettivo* (o, più semplicemente, *completamento*) della retta r. Diremo anche che r^- è una *retta proiettiva* e, per distinguerle, chiameremo *rette affini* le rette dello spazio euclideo e dello spazio complesso.

La nozione di *retta proiettiva* (e *piano o spazio proiettivo*) può essere definita in modo più astratto, fornendo un'unica chiave di lettura per trattare i tre punti di vista considerati.

5.2 Spazi proiettivi

Sia $\mathbf{V}$ un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale non nullo. In $\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiamo la *relazione di proporzionalità* $\mathcal{P}$:

$$\mathbf{v}\mathcal{P}\mathbf{w} \Leftrightarrow \text{ esiste } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ tale che } \mathbf{v} = \lambda\mathbf{w} \tag{5.2}$$

che è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathcal{P}$ prende il nome di *spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale* $\mathbf{V}$ e si denota con il simbolo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Indicheremo con

$$\pi : \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}(\mathbf{V}) \tag{5.3}$$

l'applicazione quoziente. Per ogni elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$, scriveremo $[\mathbf{v}]$ per denotare l'elemento $\pi(\mathbf{v})$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, cioè la classe di proporzionalità di $\mathbf{v}$. Gli elementi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, cioè le classi di proporzionalità dei vettori non nulli di V, sono i sottospazi vettoriali di dimensione 1 di $\mathbf{V}$ privati del vettore nullo: essi si dicono *punti* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. In sostanza $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ può essere identificato con la stella $\Sigma(\mathbf{0})$ di rette dello spazio affine associato a $\mathbf{V}$, di centro il vettore $\mathbf{0}$.

Anche l'insieme vuoto viene considerato come spazio proiettivo, il cui spazio vettoriale associato è lo spazio nullo. Se $\mathbf{V}$ ha dimensione finita, per *dimensione* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si intende la dimensione di $\mathbf{V}$ diminuita di 1, cioè si pone per definizione

$$\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V} - 1. \tag{5.4}$$

In accordo con questa definizione, lo spazio proiettivo vuoto ha dimensione -1. Si osservi che $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ha dimensione 0 se e solo se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ consiste di un solo punto. Infatti se $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 0$ allora $\dim \mathbf{V} = 1$; in tal caso, $\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ha una sola classe di proporzionalità e quindi $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si riduce ad un solo punto. Viceversa se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è

ridotto ad un solo punto allora tutti i vettori di $\mathbf{V}$ sono proporzionali, ossia dim $\mathbf{V}$ $= 1$ e quindi dim $\mathbb{P}(\mathbf{V}) = 0$.
Gli spazi proiettivi di dimensione 1 sono chiamati *rette proiettive*, quelli di dimensione 2 *piani proiettivi*.

Studiamo in dettaglio un esempio particolare, che servirà da modello:

Definizione 5.2.1. Lo spazio proiettivo numerico di dimensione n. Sia $\mathbb{K}$ un campo (ad esempio, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Per ogni $n \geq 0$ lo *spazio proiettivo numerico di dimensione* $n \geq 0$ *sul campo* $\mathbb{K}$ è il quoziente di $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ rispetto alla relazione di equivalenza data dalla proporzionalità $\mathcal{P}$:

$$(X_0, \ldots, X_n)\mathcal{P}(Y_0, \ldots, Y_n) \Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ con } X_i = \rho Y_i, i = 0, \ldots, n.$$

Lo spazio proiettivo numerico di dimensione n si denota col simbolo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, o più semplicemente col simbolo $\mathbb{P}^n$. Un suo punto P è una classe di proporzionalità di vettori numerici non nulli d'ordine $n+1$ su $\mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Se $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ è un vettore della classe P, allora

$$P = [\mathbf{X}] = \{k\mathbf{X} = (kX_0, \ldots, kX_n), \text{ al variare di } k \text{ in } \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \tag{5.5}$$

Noi scriveremo anche $[X_0, \ldots, X_n]$ per denotare la classe $[\mathbf{X}]$ e diremo che esso è un *punto dello spazio proiettivo*. Il vettore non nullo $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ si dice un *vettore di coordinate omogenee* di P. Si osservi che le coordinate omogenee di un punto P di $\mathbb{P}^n$ sono una $(n+1)-$pla di elementi di $\mathbb{K}$, non tutti nulli, e determinati solo a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Sovente, *penseremo alle coordinate omogenee dei punti di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ *come vettori colonne* invece che come vettori righe.

Lo spazio proiettivo numerico di dimensione $n = 1$ è detto *retta proiettiva numerica*, mentre lo spazio proiettivo numerico di dimensione 2, è detto *piano proiettivo numerico*.

Osservazione 5.2.2. Due vettori numerici $(X_0, \ldots, X_n)$ e $(Y_0, \ldots, Y_n)$ definiscono lo stesso punto nello spazio proiettivo se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} X_0 & \ldots & X_n \\ Y_0 & \ldots & Y_n \end{pmatrix} = 1 \tag{5.6}$$

Si osservi che $\mathbb{P}^0_{\mathbb{K}}$ consiste di un solo punto.

5.3 Sottospazi di uno spazio proiettivo.

Per *sottospazio* (proiettivo) di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si intende ogni suo sottoinsieme del tipo $\mathbf{H} = \pi(\mathbf{W} \setminus \{\mathbf{0}\})$ con $\mathbf{W}$ sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{W}$ è nullo, $\mathbf{H}$ è il sottoinsieme vuoto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Se invece $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale non nullo di $\mathbf{V}$, l'applicazione $\mathbb{P}(\mathbf{W}) \to \mathbf{H}$ definita da $[\mathbf{v}]_{\mathbf{W}} \mapsto [\mathbf{v}]$ permette di identificare $\mathbf{H}$ con $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ (indicando con $[\mathbf{v}]_{\mathbf{W}}$ la relazione di equivalenza che definisce $\mathbb{P}(\mathbf{W})$). In questo senso, i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono il sottoinsieme vuoto (detto *sottospazio vuoto*), ovvero i sottoinsiemi del tipo $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ con $\mathbf{W}$ sottospazio vettoriale non nullo di $\mathbf{V}$.

Se $\mathbf{V}$ ha dimensione finita, ogni sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ non vuoto è uno spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale di dimensione finita, e risulta così definita la sua dimensione. Per *codimensione* di un sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si intende l'intero

$$\text{codimensione di } \mathbf{H} = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - \dim \mathbf{H}. \tag{5.7}$$

I sottospazi di codimensione 1 si dicono *iperpiani* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Esempio 5.3.1. **Sottospazi dello spazio proiettivo numerico** Esaminiamo i sottospazi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Sia $\mathbf{W}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n+1}$ di dimensione $p+1$, con $p \geq 0$. Sappiamo che esiste una matrice $\mathbf{U}$ di tipo $(n-p, n+1)$ e rango $n-p$, tale che $\mathbf{W}$ abbia il *sistema normale di equazioni* $\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$ in $\mathbb{K}^{n+1}$. Di conseguenza $\mathbf{H} = \pi(\mathbf{W} \setminus \{\mathbf{0}\})$ non è altro che l'insieme dei punti di $\mathbb{P}^n$ aventi coordinate omogenee $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)^{\mathrm{t}}$ (considerati qui come vettori colonna) soluzioni del sistema $\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Viceversa, sia dato un sistema omogeneo $\mathcal{A}$ di equazioni lineari in $n+1$ incognite $X_0, \ldots, X_n$. Osserviamo che un vettore numerico $\mathbf{Y}$ soddisfa un sistema lineare omogeneo se e solo se $\rho\mathbf{Y}$ soddisfa il sistema per ogni $\rho \in \mathbb{K}$ non nullo: ha senso perciò parlare dei punti di $\mathbb{P}^n$ *aventi coordinate omogenee soluzioni del sistema.* Sia $\mathbf{W}$ il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ delle soluzioni del sistema $\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$. L'insieme $\mathbf{H}$ dei punti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ le cui coordinate omogenee sono soluzioni del sistema coincide con $\pi(\mathbf{W} \setminus \{\mathbf{0}\})$ e dunque è un sottospazio di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$; possiamo dunque riformulare la definizione di sottospazio proiettivo in questo caso:

Definizione 5.3.2. Un *sottospazio proiettivo* $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è l'insieme dei punti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ le cui coordinate omogenee soddisfano un sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} u_{10}X_0 + u_{11}X_1 + u_{12}X_2 + \ldots u_{1,n}X_n = 0 \\ u_{20}X_0 + u_{21}X_1 + u_{22}X_2 + \ldots + u_{2,n}X_n = 0 \\ \cdots \\ u_{n0}X_0 + u_{p1}X_1 + u_{p2}X_2 + \ldots + u_{p,n}X_n = 0 \end{cases}$$

Si dice che un *sistema di equazioni omogenee che rappresenta o definisce* $\mathbf{H}$ (o che il sistema è un *sistema di equazioni omogenee* di $\mathbf{H}$) se i punti di $\mathbf{H}$ hanno per coordinate omogenee tutte e sole le soluzioni non nulle del sistema.

Ovviamente tutti e soli i sistemi che rappresentano uno stesso sottospazio $\mathbf{H}$ sono tra loro equivalenti. Tra questi si può sempre scegliere un *sistema normale* che rappresenta $\mathbf{H}$, cioè un sistema di equazioni composto dal numero minimo di equazioni; *il numero di equazioni di un sistema normale è uguale alla codimensione di* $\mathbf{H}$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Esempio 5.3.3. **Iperpiani dello spazio proiettivi numerico** Un iperpiano è un sottospazio che può essere rappresentato con una singola equazione omogenea non nulla del tipo $u_0X_0 + u_1X_1 + \ldots + u_nX_n = 0$ con $(u_o, \ldots, u_n) \neq \mathbf{0}$, determinata a meno di un fattore di proporzionalità. Un iperpiano ha quindi codimensione 1.

Ad esempio in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ gli iperpiani sono i punti: infatti, il punto $[a, b]$ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ si rappresenta con la singola equazione $bX_0 - aX_1 = 0$ che ha per soluzioni tutti e soli i vettori numerici proporzionali ad (a, b). Si osservi che gli unici sottospazi propri non vuoti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ sono i punti.

Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ gli iperpiani sono rette e sono rappresentate da equazioni del tipo $u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$. Nello spazio $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ gli iperpiani sono piani e sono rappresentati da equazioni del tipo $u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0$.

Tra gli iperpiani di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ segnaliamo gli $n+1$ iperpiani aventi equazioni $X_0 = 0$, $X_1 = 0, \ldots, X_n = 0$, denotati con i simboli $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ e detti *iperpiani fondamentali* di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Definizione 5.3.4. Sia J un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ che contengono J. L'insieme $<\mathrm{J}>= \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S$ prende il nome di *sottospazio proiettivo generato da* J.

Si veda l'Esercizio Svolto 5.9 per la dimostrazione che $<\mathrm{J}>$ è il più piccolo sottospazio proiettivo contenente J.

Sia $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. I punti $P_0[\mathbf{v}_0], \ldots, P_m[\mathbf{v}_m] \in \mathbb{P}(\mathbf{W})$ *generano* $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ se i vettori $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbf{W}$ sono un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

Definizione 5.3.5. Diciamo che i punti $P_0[\mathbf{v}_0]$, ..., $P_m[\mathbf{v}_m] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono *indipendenti* se generano un sottospazio proiettivo di dimensione m. Altrimenti, diciamo che i punti sono *dipendenti*.

Equivalentemente, i punti $P_0[\mathbf{v}_0]$, ..., $P_m[\mathbf{v}_m]$ sono indipendenti quando i vettori $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbf{V}$ sono linearmente indipendenti. In particolare, i punti $P_0[\mathbf{p}_0]$, ..., $P_m[\mathbf{p}_m]$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, sono *indipendenti* se i vettori coordinati $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_m$ generano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n+1}$ di dimensione $m+1$.

Prova a dimostrare i seguenti fatti:

a) se $\mathbf{V}$ ha dimensione finita, allora il massimo numero di punti indipendenti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è pari a dim $\mathbf{V}$= dim $\mathbb{P}(\mathbf{V}) + 1$ e ogni sistema di punti indipendenti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ può essere completato ad un sistema di punti indipendenti d'ordine pari a dim $\mathbf{V}$= dim $\mathbb{P}(\mathbf{V}) + 1$;
b) *ogni sottospazio* $\mathbf{H}$ *di dimensione* $m > 0$ *di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *contiene (almeno) un sistema di* $m+1$ *punti indipendenti e ogni tale sistema genera* $\mathbf{H}$;
c) $(P_0, \ldots, P_m)$ è un sistema di punti indipendenti se e solo se ogni suo sottosistema è costituito da punti indipendenti.

Sia ora $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ un sottospazio di dimensione m dello spazio $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e sia $(P_0, \ldots, P_m)$ un sistema di punti indipendenti di $\mathbf{H}$ (nota che i punti sono esattamente $m+1$ e che quindi formano un sistema massimale di punti indipendenti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e generano $\mathbb{P}(\mathbf{V})$). Allora se $P_i = [\mathbf{v}_i]$, $i = 0, \ldots, m$, si ha che il punto

$$P = [\lambda_0 \mathbf{v}_0 + \ldots + \lambda_m \mathbf{v}_m]$$

descrive, al variare di $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tutti i punti di $\mathbf{H}$. Anzi l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}} &\to \mathbf{H} \\ [\lambda_0, \ldots, \lambda_m] &\mapsto [\lambda_0 \mathbf{v}_0 + \ldots + \lambda_m \mathbf{v}_m] \end{aligned} \tag{5.8}$$

è una biezione. Infatti φ è ben definita ed è suriettiva perché $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ è generato da $\{P_0, \ldots, P_m\}$, il che equivale a dire che $\mathbf{W}$ è generato da $\{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. Inoltre, φ è iniettiva perchè i punti $P_0, \ldots, P_m$ sono indipendenti, il che equivale a dire che i vettori $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti; infatti:

$$\begin{gathered} [\lambda_0 \mathbf{v}_0 + \ldots + \lambda_m \mathbf{v}_m] = [\lambda'_0 \mathbf{v}_0 + \ldots + \lambda'_m \mathbf{v}_m] \\ \Leftrightarrow \text{ esiste un } \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che } (\lambda_0 - \rho\lambda'_0)\mathbf{v}_0 + \ldots + (\lambda_m - \rho\lambda'_m)\mathbf{v}_m = 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) = \rho(\lambda'_0, \ldots, \lambda'_m). \end{gathered}$$

L'applicazione φ definita in (5.8) è detta *rappresentazione parametrica* del sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. L'espressione

$$[\mathbf{X}] = [\varphi(\lambda_0, \dots, \lambda_m)] \qquad (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$$

viene detta *equazione parametrica del sottospazio proiettivo* $\mathbf{H}$. Si noti che *la rappresentazione parametrica* non è unica, bensì non solo dipende dalla scelta del sistema $(P_0, \dots, P_m)$ di punti indipendenti in $\mathbf{H}$ ma *dipende anche dalla scelta dei rappresentanti* $(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_m)$. Nel paragrafo 5.5 troveremo un modo per esprimere le scelte fatte utilizzando esclusivamente punti dello spazio proiettivo e senza far comparire esplicitamente lo spazio vettoriale $\mathbf{V}$.

Esempio 5.3.6. **Equazioni parametriche e omogenee per sottospazi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$**
I punti $P_0 = [p_{00}, \dots, p_{0n}]$, ..., $P_m = [p_{m0}, \dots, p_{mn}]$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ sono indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti i vettori numerici $(p_{00}, \dots, p_{0n})$, ..., $(p_{m0}, \dots, p_{mn})$, ossia se e solo se:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} p_{00} & \dots & p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m0} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix} = m+1 \tag{5.9}$$

Si noti che sostituendo i vettori $(p_{00}, \dots, p_{0n}), \dots, (p_{m0}, \dots, p_{mn})$ con vettori ad essi proporzionali e non nulli, che individuano gli stessi punti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, la matrice che appare in (5.9) cambia, ma la condizione espressa dalla (5.9) rimane invariata.

Se la (5.9) è verificata, le equazioni parametriche del sottospazio proiettivo $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ (ove $\mathbf{W} =< (p_{00}, \dots, p_{0n}), \dots, (p_{m0}, \dots, p_{mn}) >$) possono essere scritte così:

$$\begin{cases} X_0 = \lambda_0 p_{00} + \dots + \lambda_m p_{m0} \\ \dots \\ X_n = \lambda_0 p_{0n} + \dots + \lambda_m p_{mn} \end{cases} \tag{5.10}$$

che al variare di $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ danno tutti e soli i vettori di coordinate omogenee $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_n)$ dei punti di $\mathbf{H}$. Il sistema (5.10) prende il nome di sistema di *equazioni parametriche del sottospazio proiettivo* $\mathbf{H}$.

D'altra parte un punto $P = [X_0, \dots, X_n]$ appartiene ad $\mathbf{H}$ se e solo se il vettore $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_n)$ dipende linearmente dalle righe della matrice che appare in (5.9) ossia se e solo se:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} X_0 & \dots & X_n \\ p_{00} & \dots & p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m0} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix} = m+1 \tag{5.11}$$

Questa condizione è detta una *equazione matriciale del sottospazio proiettivo* $\mathbf{H}$. Per ottenere da essa un sistema di equazioni omogenee di $\mathbf{H}$ basta annullare tutti i minori di ordine massimo della matrice che appare in (5.11). Per il Teorema di Kronecker, è sufficiente annullare i minori degli orlati di una sottomatrice non singolare di ordine $m+1$; sappiamo di poter trovare un sistema con $n-m$ equazioni.

Se $m = n-1$, ossia se $\mathbf{H}$ è un iperpiano, la matrice che appare in (5.11) è quadrata d'ordine $n+1$, e quindi l'equazione di $\mathbf{H}$ si ottiene annullando il determinante di tale matrice, ossia scrivendo

$$\det \begin{pmatrix} X_0 & \dots & X_n \\ p_{00} & \dots & p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1,0} & \dots & p_{n-1,n} \end{pmatrix} = 0 \tag{5.12}$$

Sviluppando il determinante con la regola di Laplace applicata alla prima riga, questa equazione si scrive come

$$u_0 X_0 + \ldots + u_n X_n = 0$$

dove $u_0, \ldots, u_n$ sono i minori d'ordine massimo della matrice $\begin{pmatrix} p_{00} & \dots & p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m0} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}$ presi con segni alterni, e questi sono non tutti nulli perché la matrice in questione ha rango massimo, per l'ipotesi che i punti $P_0, \ldots, P_{n-1}$ siano indipendenti.

Facciamo alcuni esempi:

a) Se $P = [a, b, c]$ e $Q = [a', b', c']$ sono punti distinti di $\mathbb{P}^2$ l'unica retta che li contiene entrambi ha equazione: $\det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0.$

b) **Punti** Il fatto che ogni sottospazio possa essere rappresentato con un sistema lineare omogeneo normale di equazioni, si può tradurre dicendo che *ogni sottospazio è intersezione di iperpiani, e che il numero minimo di iperpiani di cui il sottospazio è intersezione è pari alla codimensione del sottospazio.*
Ad esempio un punto P di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ può essere rappresentato con un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite del tipo

$$\begin{cases} u_{10} X_0 + \ldots + u_{1,n} X_n = 0 \\ \ldots \\ u_{n0} X_0 + \ldots + u_{n,n} X_n = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

che sia normale, ossia tale che la matrice

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{10} & \dots & u_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n0} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

abbia rango n. Allora le soluzioni del sistema (5.13) sono proporzionali ai minori di ordine n di $\mathbf{U}$ presi con segni alterni, e queste sono le coordinate omogenee del punto P di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ rappresentato da (5.13). Il punto P risulta intersezione degli n iperpiani rappresentati dalle singole equazioni del sistema (5.13). Ad esempio il sistema:

$$\begin{cases} 2X_0 + X_1 - X_2 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

rappresenta in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ il punto $[0, 1, 1]$.

c) **Rette** Una retta $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ammette sempre una equazione parametrica della forma

$$[\mathbf{X}] = [\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2] \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \setminus (0, 0)$$

ove $A[\mathbf{v}_1]$ e $B[\mathbf{v}_2]$ sono due punti distinti della retta. La rappresentazione parametrica corrispondente è una applicazione biettiva: (che impareremo a chiamare *sistema di coordinate omogenee sulla retta H* nel paragrafo 5.5):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} &\to \mathbf{H} \\ [\lambda, \mu] &\mapsto [\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}] \end{aligned} \tag{5.14}$$

In particolare, ogni retta di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è parametrizzata dalla retta proiettiva numerica. É dunque possibile parlare, in generale, di "rette proiettive".
Ogni retta di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si può rappresentare con un sistema normale di $n-1$ equazioni (indipendenti tra loro). Ad esempio una retta di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ si rappresenta con un sistema del tipo:

$$\begin{cases} u_{10}X_0 + u_{11}X_1 + u_{12}X_2 + u_{13}X_3 = 0 \\ u_{20}X_0 + u_{21}X_1 + u_{22}X_2 + u_{23}X_3 = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

con la condizione che:

$$rg \begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix} = 2. \tag{5.16}$$

Esempio 5.3.7. **Intersezione e spazio congiungente** Dati due sottospazi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, la loro *intersezione* è ancora un sottospazio di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$: dati due sottospazi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ rappresentati dai sistemi omogenei $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$, il sottospazio intersezione dei due si rappresenta con il sistema $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$. Più in generale, l'*intersezione* di due sottospazi $\mathbf{H}_1 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1)$ e $\mathbf{H}_2 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_2)$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è il sottospazio

$$\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2).$$

Due sottospazi $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ si dicono *incidenti* se la loro intersezione è non vuota. Consideriamo ora il sottospazio

$$\mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)$$

Il sottospazio proiettivo $\mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2$ si dice *spazio congiungente* i due sottospazi $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$. Esso è il più piccolo sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ contenente $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$; in particolare, per ogni $P \in \mathbf{H}_1$ ed ogni $Q \in \mathbf{H}_2$ con $P \neq Q$, lo spazio $\mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2$ contiene la retta congiungente P e Q.

Più in generale, possiamo considerare lo spazio congiungente e lo spazio intersezione di vari sottospazi; lo spazio congiungente dei punti $P_0, \ldots, P_m$ coincide con il sottospazio generato da $P_0, \ldots, P_m$.

Tenendo presente la formula di Grassmann per spazi vettoriali (Teorema (9.14) di [1]), si dimostra facilmente il seguente:

Teorema 5.3.8. (Formula di Grassmann in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$) *Sia $n \geq 1$. Se $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ sono sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si ha*

$$\dim \mathbf{H}_1 + \dim \mathbf{H}_2 = \dim (\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2) + \dim (\mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2).$$

Nell'applicare la formula, è essenziale ricordarsi che la dimensione dello spazio vuoto è -1. In particolare, se $\mathbf{H}$ è un sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e P è un punto, allora:
(a) o $P \in \mathbf{H}$, e in tal caso $P \vee \mathbf{H} = \mathbf{H}$;
(b) oppure $P \notin \mathbf{H}$, nel qual caso $P \vee \mathbf{H}$ è un sottospazio di dimensione di 1 superiore a quella di $\mathbf{H}$.

Similmente, se $\mathbf{H}'$ è un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ allora:
(a*) o $\mathbf{H}'$ contiene $\mathbf{H}$, nel qual caso $\mathbf{H}' \cap \mathbf{H} = \mathbf{H}$;

(b*) oppure $\mathbf{H}'$ non contiene $\mathbf{H}$, e allora $\mathbf{H}' \vee \mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbf{H}' \cap \mathbf{H}$ è un sottospazio di dimensione di uno inferiore a quella di $\mathbf{H}$.

In particolare, una retta proiettiva ed un iperpiano hanno sempre una intersezione non vuota.

Dalla regola di Grassmann segue in particolare che:

$$\dim \mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2 \leq \dim \mathbf{H}_1 + \dim \mathbf{H}_2 + 1$$

e l'uguaglianza viene raggiunta se e solo se $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \emptyset$, caso in cui $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ si dicono *sghembi*. Ciò equivale a dire che i sottospazi $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_2$, associati ad $\mathbf{H}_1$ ed $\mathbf{H}_2$ rispettivamente, sono in somma diretta, cioè $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\mathbf{0}\}$.

In particolare, comunque assegnate due rette, il loro sottospazio congiungente ha dimensione ≤ 3; due rette in un piano proiettivo, o coincidono oppure si intersecano in un punto (non vale quindi l'assioma euclideo che assicura che, dati una retta ed un punto esterno ad essa). Più in generale, due iperpiani in uno spazio proiettivo, o coincidono oppure si intersecano in un sottospazio di codimensione 2.

5.4 Proiettività

Definizione 5.4.1. Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ spazi vettoriali non nulli. Una applicazione $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ si dice una *proiettività* (o *omografia* o *trasformazione proiettiva*) se esiste una applicazione lineare iniettiva $\varphi_l : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ (che si dice l'*applicazione lineare associata a* φ) tale che, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ si abbia

$$\varphi([\mathbf{v}]) = [\varphi_l(\mathbf{v})]$$

Si richiede che l'applicazione φ_l sia iniettiva, altrimenti esisterebbe un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ con $\varphi_l(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ e il corrispondente punto $P = [\mathbf{v}]$ non avrebbe una immagine. Si noti che una proiettività è necessariamente iniettiva: infatti, se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}\setminus\{\mathbf{0}\}$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi([\mathbf{v}]) = \varphi([\mathbf{w}]) \Leftrightarrow [\varphi_l(\mathbf{v})] = [\varphi_l(\mathbf{w})] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{ esiste un } k \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che } \varphi_l(\mathbf{v}) = k\varphi_l(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varphi_l(\mathbf{v} - k\mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = k\mathbf{w} \Leftrightarrow [\mathbf{v}] = [\mathbf{w}]. \end{aligned}$$

Una proiettività biettiva prende anche il nome di *isomorfismo* e l'applicazione lineare ad esso associata è un isomorfismo. Spazi proiettivi legati da un isomorfismo si dicono *isomorfi*. Inoltre, diciamo che due sottoinsiemi $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}'$ di uno spazio proiettivo sono *proiettivi* o *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività φ tale che $\varphi(\mathbf{S}) = \mathbf{S}'$. La composizione di due proiettività è ancora una proiettività e l'applicazione inversa di una proiettività biettiva è una proiettività. Pertanto le proiettività biettive di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in sè con l'operazione di prodotto di composizione costituiscono un gruppo, detto *gruppo proiettivo* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, che si denota con $\mathrm{Pgl}(\mathbf{V})$.

Osservazione 5.4.2. Se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ha dimensione finita ogni proiettività di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in sè è necessariamente biettiva; pertanto, in questo caso, $\mathrm{Pgl}(\mathbf{V})$ è costituito da tutte le proiettività di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in sè. Inoltre, sempre se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ha dimensione finita, per definizione di proiettività, esiste una applicazione naturale suriettiva

$$p : \mathrm{Gl}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Pgl}(\mathbf{V})$$

che ad ogni $\psi \in \mathrm{Gl}(\mathbf{V}) = \{$automorfismi lineari di $\mathbf{V}\}$ associa l'unica proiettività φ tale che $\varphi_l = \psi$, ossia tale che $\varphi([\mathbf{v}]) = [\psi(\mathbf{v})]$, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$. La p non è un'applicazione iniettiva, in quanto se $\varphi \in \mathrm{Gl}(\mathbf{V})$ e se k è uno scalare non nullo, si ha $p(k\psi) = p(\psi)$. Infatti per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ si ha

$$p(k\psi)([\mathbf{v}]) = [k\psi(\mathbf{v})] = [\psi(\mathbf{v})] = p(\psi)([\mathbf{v}])$$

Più precisamente abbiamo la:

Proposizione 5.4.3. *Date ψ e $\psi' \in \mathrm{Gl}(\mathbf{V})$, si ha $p(\psi) = p(\psi')$ se e solo se esiste un $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $\psi' = k\psi$.*

Dimostrazione. Se $p(\psi) = p(\psi')$, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ esiste uno scalare non nullo $k_{\mathbf{v}}$ tale che $\psi'(\mathbf{v}) = k_{\mathbf{v}}\psi(\mathbf{v})$. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori non nulli di $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti, è chiaro che $k_{\mathbf{v}} = k_{\mathbf{w}}$. Se invece $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, allora

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= k_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}\psi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}\psi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{w}) \\ &= \psi'(\mathbf{v}) + \psi'(\mathbf{w}) = k_{\mathbf{v}}\psi(\mathbf{v}) + k_{\mathbf{w}}\psi(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

e, poiché $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, si deve avere che $k_{\mathbf{v}} = k_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = k_{\mathbf{w}}$. Ma allora $k_{\mathbf{v}} = k_{\mathbf{w}}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, e dunque $\psi' = k\,\psi$ con $k = k_{\mathbf{v}}$.

□

Come visto anche in [1], capitolo 13, n. 10, si verifica facilmente che p è un omomorfismo di gruppi (cfr. [1], proposizione (13.13)). Inoltre come immediato corollario della Proposizione 5.4.3 si ha che:

Corollario 5.4.4. *Il nucleo di p è il sottogruppo di $\mathrm{Gl}(\mathbf{V})$, isomorfo al gruppo moltiplicativo di $\mathbb{K}$, costituito dalle omotetie invertibili di $\mathbf{V}$.*

Esempio 5.4.5. **Proiettività tra spazi proiettivi numerici** Si consideri una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ e l'applicazione lineare ad essa associata $\varphi_l : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{m+1}$. Poiché φ_l è iniettiva, si ha necessariamente $n \leq m$.

Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j} \in M(m+1, n+1; \mathbb{K})$ la matrice associata a φ_l. Per ogni vettore $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)^t, \mathbf{Y} = (Y_0, \ldots, Y_m)^t \in \mathbb{K}^{n+1}$, considerati come vettori colonna, si ha che $[\mathbf{Y}] = [\varphi_l(\mathbf{X})]$, se e solo se esiste $\rho \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}$ con

$$\rho\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \tag{5.17}$$

ossia

$$\begin{cases} \rho Y_0 = a_{00}X_0 + \ldots + a_{0n}X_n \\ \ldots \\ \rho Y_m = a_{m0}X_0 + \ldots + a_{mn}X_n \end{cases} \qquad \exists \rho \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{5.18}$$

La proiettività φ agisce sui punti di $\mathbb{P}^n$ nel seguente modo: per ogni punto $P = [\mathbf{X}] \in \mathbb{P}^n$ si ha $\varphi(P) = [\mathbf{Y}] = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}] \in \mathbb{P}^m$. La (5.17) si dice *equazione matriciale* della proiettività e le (5.18) si dicono *equazioni esplicite* della proiettività. Notiamo che, in virtù dell'iniettività di φ_l, la matrice $\mathbf{A}$ ha rango $n + 1$.

In particolare una proiettività φ di $\mathbb{P}^n$ in sè è data assegnando una matrice $\mathbf{A}$ quadrata, non degenere, d'ordine $n + 1$ su $\mathbb{K}$, che determina l'applicazione lineare associata φ_l. Il gruppo proiettivo di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si denota col simbolo $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$ e prende il nome di *gruppo proiettivo lineare generale*. Abbiamo un omomorfismo suriettivo

$$p : \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K}) \to \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$$

La proposizione (5.4.3) si traduce nel seguente fatto: *due matrici* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}'$ *di* $GL(n+1, \mathbb{K})$ *determinano la stessa proiettività in* $PGL(n+1, \mathbb{K})$ *se e solo se sono proporzionali.* □

Riprendiamo la discussione generale. Vale la seguente:

Proposizione 5.4.6. *Sia* $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ *una proiettività e sia* $\mathbf{H}$ *un sottospazio di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. *Allora* $\mathbf{H}' = \varphi(\mathbf{H})$ *è un sottospazio di* $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$*; inoltre la restrizione di* φ *ad* $\mathbf{H}$ *è un isomorfismo di* $\mathbf{H}$ *su* $\mathbf{H}'$.
In particolare, se $\mathbf{H}$ *ha dimensione finita, anche* $\mathbf{H}' = \varphi(\mathbf{H})$ *ha dimensione finita e i sottospazi* $\mathbf{H}$ *e* $\mathbf{H}'$ *hanno la stessa dimensione.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ allora posto $\mathbf{W}' = \varphi(\mathbf{W})$, si ha che $\mathbf{W}'$ è un sottospazio di $\mathbf{V}'$ e chiaramente $\mathbf{H}' = \mathbb{P}(\mathbf{W}')$. Di qui si deduce subito l'asserto. □

Come immediata conseguenza della proposizione 5.4.6 si ha che le proiettività conservano dipendenza e indipendenza di punti.

Esempio 5.4.7. **Equazioni dell'immagine di un sottospazio**
Sia $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ una proiettività avente equazioni (5.17) o (5.18). Consideriamo un sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ avente un sistema normale di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} u_{10}X_0 + \ldots + u_{1n}X_n = 0 \\ \ldots \\ u_{h0}X_0 + \ldots + u_{hn}X_n = 0 \end{cases}, \tag{5.19}$$

che scriviamo in forma matriciale come

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = 0 \tag{5.20}$$

Dunque $\mathbf{H}$ ha dimensione $n-h$. Per trovare le equazioni del sottospazio $\varphi(\mathbf{H})$ possiamo procedere nel modo seguente:

(a) determiniamo dapprime dapprima $n-h+1$ punti indipendenti $P_0, \ldots, P_{n-h}$ di $\mathbf{H}$: ciò si fa trovando $n-h+1$ soluzioni $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{n-h}$ linearmente indipendenti del sistema (5.19);

(b) osserviamo che $\varphi(\mathbf{H})$ è il sottospazio generato dai punti $\varphi(P_0) = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_0]$, $\ldots, \varphi(P_{n-h}) = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_{n-h}]$, che sono indipendenti perché φ_l è iniettiva; ora troviamo per $\varphi(\mathbf{H})$ equazioni parametriche o omogenee come indicato nell'Esempio 5.3.6.

In particolare se $\varphi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ è un isomorfismo, allora le equazioni di φ^{-1} si ottengono dalle (5.17) o (5.18) risolvendole, come sistema lineare di $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite $X_0, \ldots, X_n$. Si ottiene così:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$$

e le equazioni di $\varphi(\mathbf{H})$ sono allora ovviamente date da $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$, ossia da

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

Ad esempio si consideri la proiettività φ di $\mathbb{P}^2$ in sè di equazioni

$$\begin{cases} Y_0 = X_0 + X_1 \\ Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases}$$

e la retta di $\mathbb{P}^2$ di equazione

$$3X_0 + 2X_1 + X_2 = 0$$

La proiettività φ^{-1} ha equazioni

$$\begin{cases} X_0 = Y_0 - Y_1 + Y_2 \\ X_1 = Y_1 - Y_2 \\ X_2 = Y_2 \end{cases}$$

sicché la retta $\varphi(r)$ ha equazione

$$3(Y_0 - Y_1 + Y_2) + 2(Y_1 - Y_2) + Y_2 = 0 \Leftrightarrow 3Y_0 - Y_1 + 2Y_2 = 0. \quad \square$$

Osservazione 5.4.8. È possibile estendere la definizione di proiettività considerando anche trasformazioni indotte da applicazioni lineari non iniettive. Se $\varphi_l : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ è un'applicazione lineare non nulla tra $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $\mathbf{W} = \ker \varphi_l$, si considera il sottospazio $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \subset \mathbb{P}(\mathbf{V})$; si chiama *proiettività degenere* indotta da φ_l l'applicazione $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V})\backslash\mathbf{H} \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ definita da $\varphi([\mathbf{v}]) = [\varphi_l(\mathbf{v})]$ per ogni $[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})\backslash\mathbf{H}$. Se φ_l è iniettiva, il sottospazio proiettivo $\mathbf{V}$ è vuoto e φ è la trasformazione proiettiva indotta da φ_l come nella Definizione 5.4.1: in tal caso si specifica talvolta che φ è una *proiettività non degenere*. Come nel caso delle proiettività, l'applicazione φ permette di ricostruire l'applicazione lineare φ_l a meno di moltiplicazione per uno scalare non nullo.

Se $\mathbf{S} \subset \mathbb{P}(\mathbf{V})$ è un sottospazio non contenuto in $\mathbf{H}$, la restrizione di φ al sottoinsieme $\mathbf{S} \setminus (\mathbf{S} \cap \mathbf{H})$ è una proiettività degenere a valori in $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$, e, se $\mathbf{S} \cap \mathbf{H} = \emptyset$, è una proiettività.

5.5 Riferimenti proiettivi

Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ uno spazio proiettivo di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$. Poiché $\mathbf{V}$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione $n+1$, esso è isomorfo a $\mathbb{K}^{n+1}$ e corrispondentemente $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ sono isomorfi. Ogni isomorfismo $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ si dice un *sistema di coordinate omogenee* in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. In particolare l'identità di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è un sistema di coordinate di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ detto *sistema di coordinate naturale* di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Con questa definizione, una descrizione parametrica di un sottospazio proiettivo $\mathbf{H}$, definita in (5.8), è un sistema di coordinate del sottospazio $\mathbf{H}$.

Dato un punto P di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, le coordinate omogenee di $\varphi^{-1}(P)$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si dicono *coordinate omogenee* del punto P nel riferimento $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$. In particolare, si dicono *punti fondamentali del riferimento* gli $n+1$ punti aventi coordinate omogenee $[1, 0, \ldots, 0]$, $[0, 1, 0, \ldots, 0]$, $\ldots$,$[0, \ldots, 0, 1]$, mentre il punto di coordinate omogenee $[1, 1, \ldots, 1]$ si dice *punto unitario del riferimento*. L'insieme ordinato composto dai punti fondamentali e dal punto unità prende il nome di *riferimento proiettivo* associato al sistema di coordinate omogenee. Il Teorema fondamentale dei riferimenti

(Corollario 5.5.5) mostrerà che φ è univocamente individuata dal riferimento ad essa associato e diremo talora che φ *"è" un riferimento.*

Dato un sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, un sistema di equazioni omogenee di $\varphi^{-1}(\mathbf{H})$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si dice anche un *sistema di equazioni* di $\mathbf{H}$ in φ (o che *rappresenta* $\mathbf{H}$ *nel sistema di coordinate* φ). Se $\mathcal{A}$ è un tale sistema omogeneo, un punto P di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ appartiene ad $\mathbf{H}$ se e solo se le sue coordinate omogenee sono soluzione del sistema $\mathcal{A}$. Simili considerazioni valgono per sistemi di equazioni parametriche.

Dato poi un sistema di punti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, essi sono *dipendenti o indipendenti* a seconda che lo siano i punti ad essi corrispondenti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Inoltre, sottospazi proiettivi sghembi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ corrispondono a sottospazi sghembi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Definizione 5.5.1. Una $(m+1)$-pla $(P_0, \ldots, P_m)$ di punti di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione n su $\mathbb{K}$ si dice *in posizione generale* se

$m \leq n$ e $P_0, \ldots, P_m$ sono indipendenti, oppure
$m > n$ e ogni $n+1$-pla di punti estratta da $(P_0, \ldots, P_m)$ è indipendente (e quindi genera $\mathbb{P}(\mathbf{V})$).

Esempio 5.5.2. In $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tre punti sono in posizione generale se e solo se sono tra loro distinti a due a due. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ quattro punti sono in posizione generale se e solo se tre di loro non sono mai allineati. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ cinque punti sono in posizione generale se e solo se quattro di loro non sono mai complanari.

Esempio 5.5.3. Assegnato un sistema di coordinate omogenee $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$, la $n+2$-pla $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ formata dai punti fondamentali e dal punto unitario di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è in posizione generale. Infatti basta considerare la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix}$$

di tipo $(n+2, n+1)$ avente per righe le coordinate omogenee dei punti $P_0, \ldots, P_{n+1}$ ordinatamente. Quanto affermato segue dal fatto che comunque si cancelli una riga da $\mathbf{A}$ si ottiene una matrice quadrata di rango massimo $n+1$, il cui determinante è uguale, come subito si verifica, a ± 1.

Il Teorema fondamentale dei riferimenti (Corollario 5.5.5) mostrerà che ogni $(n+2)$-pla di punti in posizione generale si ottiene in questo modo, cioè è formata dai punti fondamentali e dal punto unità di un opportuno riferimento proiettivo.

Consideriamo due spazi proiettivi $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$, e fissiamo i sistemi di coordinate $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\varphi' : \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$; data una proiettvità $\psi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$, possiamo considerare la proiettività $\varphi'^{-1} \circ \psi \circ \varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$. Le equazioni di quest'ultima proiettività si dicono *equazioni della proiettività* ψ nei sistemi di coordinate φ e φ'. Se, ad esempio, (5.17) sono le equazioni matriciali di $\varphi'^{-1} \circ \psi \circ \varphi$, la proiettività φ agisce mandando un punto $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ di coordinate omogenee $[\mathbf{X}]$ in φ nel punto $\psi(P)$ di coordinate omogenee $[\mathbf{Y}] = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}]$ in φ'. La matrice $\mathbf{A}$, determinata a meno di proporzionalità si dice *matrice di* ψ *nei sistemi di coordinate* φ e φ'.

In particolare se $\mathbb{P}(\mathbf{V}) = \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ si può prendere $\varphi = \varphi'$ e parlare di equazioni della proiettività ψ in φ. L'applicazione

$$\Phi_\varphi : PGL(\mathbf{V}) \to PGL(n+1, \mathbb{K})$$

che ad ogni proiettività ψ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in sè associa la matrice di ψ in φ (determinata a meno di proporzionalità) è un isomorfismo di gruppi.

Infine se $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n(\mathbf{V})$ e $\varphi' : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono sistemi di coordinate in uno stesso spazio proiettivo, l'applicazione $\varphi'^{-1} \circ \varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è una proiettività di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ in sè. Se (5.17) o (5.18) ne sono le equazioni, esse si dicono le *formule del cambiamento delle coordinate da* φ *a* φ'. Esse si interpretano nel modo seguente: se P è un punto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ avente coordinate omogenee $[\mathbf{X}]$ in φ, lo stesso punto P ha coordinate omogenee $[\mathbf{Y}] = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}]$ in φ'. Si osservi che le nozioni di sottospazi proiettivi e di proiettività sono invarianti per cambi di sistemi di coordinate.

Concludiamo queste considerazioni generali sulle proiettività dimostrando il seguente:

Teorema 5.5.4. (Teorema fondamentale delle proiettività) *Siano dati due spazi proiettivi* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *e* $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$ *della stessa dimensione* n *e siano fissate due* $n+2$*-ple* $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ *e* $(Q_0, \ldots, Q_{n+1})$ *di punti in posizione generale di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *e* $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$*, rispettivamente. Allora esiste una e una sola proiettività* $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ *tale che* $\varphi(P_i) = Q_i$ *per ogni* $i = 0, \ldots, n+1$.

Dimostrazione. Poniamo $P_i = [\mathbf{v}_i]$, $Q_i = [\mathbf{w}_i]$ per ogni $i = 0, \ldots, n+1$. Abbiamo una proiettività $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, \ldots, n+1$, se e solo se esiste una applicazione lineare iniettiva $\psi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ ed esistono opportuni scalari λ_i, $i = 0, \ldots, n+1$, tutti non nulli, tali che $\psi(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{w}_i$, per ogni $i = 0, \ldots, n+1$. Poiché per ipotesi $(\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_n)$ sono indipendenti, essi sono riferimenti di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ rispettivamente. Pertanto, comunque scelti gli scalari λ_i, $i = 0, \ldots, n$, esiste ed è unica l'applicazione lineare $\psi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ tale che $\psi(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{w}_i$, per ogni $i = 0, \ldots, n$. Il problema è dunque quello di determinare $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tutti non nulli, in modo che esista poi uno scalare λ_{n+1}, ancora non nullo e tale che $\psi(\mathbf{v}_{n+1}) = \lambda_{n+1} \mathbf{w}_{n+1}$. Osserviamo che $\mathbf{v}_{n+1}$ e $\mathbf{w}_{n+1}$ dipendono linearmente da $(\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_n)$ rispettivamente, ossia si hanno relazioni del tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n+1} &= a_0 \mathbf{v}_0 + \ldots + a_n \mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_{n+1} &= b_0 \mathbf{w}_0 + \ldots + b_n \mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Notiamo che, in tali relazioni, gli scalari $a_0, \ldots, a_n$ sono tutti non nulli. Se infatti fosse $a_i = 0$, avremmo che il sistema $[\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}]$ è linearmente dipendente e quindi tale sarebbe anche il sistema di punti $[P_0, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_{n+1}]$, contro l'ipotesi che i punti $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ siano in posizione generale. Similmente si verifica che $b_0, \ldots, b_{n+1}$ sono tutti scalari non nulli. Ora la condizione richiesta sugli scalari $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$ è che:

$$\psi(\mathbf{v}_{n+1}) = \lambda_{n+1} \mathbf{w}_{n+1} = \lambda_{n+1}(b_0 \mathbf{w}_0 + \ldots + b_n \mathbf{w}_n) = \lambda_{n+1} b_0 \mathbf{w}_0 + \ldots + \lambda_{n+1} b_n \mathbf{w}_n$$

e, contemporaneamente, che:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{v}_{n+1}) = \psi(a_0 \mathbf{v}_0 + \ldots + a_n \mathbf{v}_n) &= a_0 \psi(\mathbf{v}_0) + \ldots + a_n \psi(\mathbf{v}_n) \\ &= \lambda_0 a_0 \mathbf{w}_0 + \ldots + \lambda_n a_n \mathbf{w}_n. \end{aligned}$$

Per l'indipendenza lineare di $(\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_n)$ queste due uguaglianze si traducono nella condizione seguente

$$\begin{cases} \lambda_0 a_0 - \lambda_{n+1} b_0 = 0 \\ \dots \\ \lambda_n a_n - \lambda_{n+1} b_n = 0 \end{cases} \tag{5.21}$$

che costituisce un sistema lineare $\mathcal{A}$ omogeneo di $n+1$ equazioni nelle $n+2$ incognite $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$. Ogni soluzione non nulla di $\mathcal{A}$ ha tutte le componenti non nulle, e quindi dà luogo ad una proiettività $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ con la proprietà richiesta. Inoltre, soluzioni proporzionali e non nulle di $\mathcal{A}$ danno luogo alla stessa proiettività. Infine, ogni proiettività $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ con la proprietà richiesta si ottiene in tal modo. Per concludere la dimostrazione basta allora verificare che l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{A}$ è un sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{K}^{n+2}$. Ma ciò è chiaro, perché la matrice di $\mathcal{A}$ è data da:

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & & -b_0 \\ 0 & a_1 & \dots & & -b_1 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n & -b_n \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

e il suo minore determinato dalle prime $n+1$ colonne e da tutte le righe è $a_0 a_1 ... a_n$, che, come visto, è non nullo.

□

Immediata conseguenza del teorema fondamentale delle proiettività è il seguente:

Corollario 5.5.5. (Teorema fondamentale dei riferimenti) *Sia* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *uno spazio proiettivo di dimensione* n *e sia* $(P_0, \dots, P_{n+1})$ *una* $n+2$*-pla di punti di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *in posizione generale. Esiste allora uno ed un solo sistema di coordinate* $\varphi: \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ *i cui punti fondamentali e punto unitario siano ordinatamente* $P_0, \dots, P_{n+1}$*. In altre parole,* $(P_0, \dots, P_{n+1})$ *sono il riferimento di uno ed un solo sistema di coordinate.*

Dimostrazione. Come visto nell'esempio (5.5.3), i punti fondamentali e il punto unitario di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ costituiscono una $n+2$-pla $(U_0, \dots, U_{n+1})$ in posizione generale. Per il teorema fondamentale delle proiettività, esiste una e una sola proiettività $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ tale che $\varphi(U_i) = P_i$, per ogni $i = 0, \dots, n+1$; la φ è il sistema di coordinate richiesto.

□

5.6 Geometria affine e geometria proiettiva.

Consideriamo una biezione $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \Omega$ tra un insieme Ω e uno spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ su un campo $\mathbb{K}$. Se identifichiamo Ω con $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tramite φ, allora Ω stesso può essere riguardato come uno spazio proiettivo e φ come un isomorfismo. Si dice allora che φ determina una *struttura di spazio proiettivo* su Ω. Due strutture di spazio proiettivo su Ω, determinate dalle applicazioni $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \Omega$ e $\varphi' : \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}} \to \Omega$ saranno considerate *equivalenti* se l'applicazione $\varphi'^{-1} \circ \varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ è un isomorfismo (e, in particolare, $n = m$). Se le due strutture sono equivalenti nel senso di cui sopra, allora i due modi di riguardare Ω come spazio proiettivo sostanzialmente coincidono: ad esempio un sottoinsieme $\mathbf{H}$ di Ω è un sottospazio in una delle due strutture se e solo se lo è nell'altra e la dimensione è la stessa, ecc.

Sia ora $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ lo spazio affine numerico di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$. Denotiamo con

$$\mathbb{A}^n_\infty$$

l'insieme i cui elementi sono le giaciture delle rette di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (spesso la giacitura viene chiamata anche *direzione* della retta). Gli elementi di $\mathbb{A}^n_\infty$ sono detti *punti impropri* di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e sono in biezione con i sottospazi di dimensione 1 di $\mathbb{K}^n$. Per distinguerli, i punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ vengono detti *punti propri.*

Vedremo ora che sull'insieme $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \cup \mathbb{A}^n_\infty$ esiste una struttura naturale di spazio proiettivo di dimensione n su K tale che $\mathbb{A}^n_\infty$ ne sia un iperpiano, detto *iperpiano improprio* o *iperpiano all'infinito* di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Lo spazio proiettivo $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \cup \mathbb{A}^n_\infty$ si denoterà col simbolo

$$\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$$

e verrà detto *completamento proiettivo dello spazio affine* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Per definire la struttura di spazio proiettivo in $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$, fissiamo un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, R)$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, e consideriamo l'applicazione

$$\varphi_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \cup \mathbb{A}^n_\infty \tag{5.23}$$

che agisce sul punto $[X_0, \ldots, X_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ nel seguente modo:

(a) se $X_0 \neq 0$, $\varphi_{\mathcal{R}}$ associa a $[X_0, \ldots, X_n]$ il punto di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ avente in $\mathcal{R}$ coordinate cartesiane date da

$$x_1 = X_1/X_0, \ldots, x_n = X_n/X_0 \tag{5.24}$$

(b) se $X_0 = 0$, $\varphi_{\mathcal{R}}$ associa a $[X_0, \ldots, X_n] = [0, X_1, \ldots, X_n]$ il punto di $\mathbb{A}^n_\infty$ corrispondente all'unica direzione avente numeri direttori $(X_1, \ldots, X_n)$ nel riferimento $\mathcal{R}$.

L'applicazione $\varphi_{\mathcal{R}}$ è una biezione e la sua applicazione inversa agisce nel seguente modo:

(a') se un punto $P \in \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ sta in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ed ha coordinate cartesiane $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{R}$, ad esso è associato il punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ di coordinate omogenee $[1, x_1, \ldots, x_n]$;

(b') se un punto $d \in \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ sta in $\mathbb{A}^n_\infty$ e corrisponde ad una direzione avente numeri direttori $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{R}$, ad esso è associato il punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ di coordinate omogenee $[0, x_1, \ldots, x_n]$.

La $\varphi_{\mathcal{R}}$ determina la struttura di spazio proiettivo su $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ da noi cercata. Infatti i punti di $\mathbb{A}_\infty$ corrispondono ai punti dell'iperpiano di equazione $X_0 = 0$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e dunque $\mathbb{A}^n_\infty$ stesso è un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ nella suddetta struttura. Tuttavia, poiché $\varphi_{\mathcal{R}}$ dipende ovviamente da $\mathcal{R}$, per dare senso a questa costruzione bisogna verificare che:

Proposizione 5.6.1. *Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ sono riferimenti cartesiani di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, allora $\varphi_{\mathcal{R}}$ e $\varphi'_{\mathcal{R}}$ determinano strutture equivalenti su $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$.*

Dimostrazione. Siano

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + c_n \end{cases} \tag{5.25}$$

le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Mostriamo che l'applicazione $\varphi'^{-1}_{\mathcal{R}} \circ \varphi_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ corrisponde alla proiettività di equazioni

$$\begin{cases} \rho Y_0 = X_0 \\ \rho Y_1 = c_1 X_0 + a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n \\ \ldots \\ \rho Y_n = c_n X_0 + a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \tag{5.26}$$

Sia infatti $[X_0, X_1, \ldots]$ un punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tale che $X_0 = 0$. La sua immagine tramite $\varphi_{\mathcal{R}}$ è il punto di $\mathbb{A}^n_\infty$ corrispondente all'unica direzione avente numeri direttori $(X_1, \ldots, X_n)$ nel riferimento $\mathcal{R}$. Nel riferimento $\mathcal{R}'$ i numeri direttori della stessa direzione sono dati da

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n \\ \ldots \\ y_n = a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n \end{cases} \tag{5.27}$$

sicché $\varphi'_{\mathcal{R}}(\varphi_{\mathcal{R}}[0, X_1 \ldots, X_n])$ è il punto di coordinate omogenee

$$\begin{cases} Y_0 = 0 = X_0 \\ Y_1 = c_1X_0 + a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n = a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n \\ \ldots \\ Y_n = c_nX_0 + a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n = a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n \end{cases} \tag{5.28}$$

Se invece $[X_0, \ldots, X_n]$ è tale che $X_{n+1} \neq 0$ allora la sua immagine tramite $\varphi_{\mathcal{R}}$ è il punto di $\mathbb{A}^n_K$ che ha in $\mathcal{R}$ coordinate $(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0)$. Lo stesso punto ha in $\mathcal{R}'$ coordinate cartesiane date da

$$\begin{cases} y_1 = c_1 + a_{11}(X_1/X_0) + \ldots + a_{1n}(X_n/X_0) \\ \ldots \\ y_n = c_0 + a_{n1}(X_1/X_0) + \ldots + a_{nn}(X_n/X_0) \end{cases} \tag{5.29}$$

sicché $\varphi'_{\mathcal{R}}(\varphi_{\mathcal{R}}[0, X_1 \ldots, X_n])$ è il punto di coordinate omogenee :

$$\begin{cases} Y_0 = 1 \\ Y_1 = c_1 + a_{11}(X_1/X_0) + \ldots + a_{1n}(X_n/X_0) \\ \ldots \\ Y_n = c_n + a_{n1}(X_1/X_0) + \ldots + a_{nn}(X_n/X_0) \end{cases} \tag{5.30}$$

ossia, moltiplicando per $X_0 \neq 0$, di coordinate omogenee date dalle (5.26). $\square$

Osserviamo che per ogni riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $\varphi_{\mathcal{R}}$ risulta un riferimento di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$, nel quale l'iperpiano improprio $\mathbb{A}^n_\infty$ ha equazione $X_0 = 0$. Questo riferimento di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ si dice *associato* ad $\mathcal{R}$ e si indica spesso con lo stesso simbolo $\mathcal{R}$. E' facile verificare che ogni riferimento di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ in cui l'iperpiano improprio ha equazione $X_0 = 0$, è del tipo $\varphi_{\mathcal{R}}$, con $\mathcal{R}$ opportuno riferimento di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Le formule (5.24) si dicono *formule per il passaggio da coordinate omogenee a coordinate cartesiane* in un riferimento $\mathcal{R}$ e valgono per i punti propri ossia per i punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. La (5.26) fornisce invece la formula per il cambiamento delle coordinate omogenee nel passaggio da un riferimento $\mathcal{R}$ a uno $\mathcal{R}'$ laddove le coordinate cartesiane cambiano con le formule (5.25).

Proposizione 5.6.2. *(a) Sia $\mathbf{S}$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_K$ e sia $\mathbf{S}_\infty \subseteq \mathbb{A}_\infty$ l'insieme dei punti impropri di $\mathbf{S}$ (cioè delle giaciture di rette parallele ad $\mathbf{S}$). Allora $\mathbb{P}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} \cup \mathbf{S}_\infty$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$. Precisamente se, in un dato riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $\mathbf{S}$ ha equazioni*

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + \ldots + u_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ \ldots \\ u_{m1}x_1 + \ldots + u_{mn}x_n + b_m = 0 \end{cases} \tag{5.31}$$

allora $\mathbb{P}(\mathbf{S})$ ha nel riferimento associato equazioni

$$\begin{cases} b_1X_0 + u_{11}X_1 + \ldots + u_{1n}X_n = 0 \\ \ldots \\ b_mX_0 + u_{m1}X_1 + \ldots + u_{mn}X_n = 0 \end{cases} \tag{5.32}$$

(b) Viceversa, sia $\mathbf{H}$ *un sottospazio di* $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ *non contenuto in* $\mathbb{A}_\infty$*. Allora il sottoinsieme* $\mathbf{S} = \mathbf{H} \setminus (\mathbf{H} \cap \mathbb{A}^n_\infty)$ *è un sottospazio affine di* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *tale che* $\mathbb{P}(\mathbf{S}) = \mathbf{H}$.

Dimostrazione. (a) Se $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ è soluzione del sistema (5.31), allora si ha che $[1, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ è soluzione di (5.32). Viceversa, se $(\xi_0, \ldots \xi_n)$ è soluzione di (5.32) allora o $\xi_0 \neq 0$, e in tal caso $(\xi_1/\xi_0, \ldots, \xi_n/\xi_0)$ è soluzione di (5.31), oppure $\xi_0 = 0$ e allora $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ è soluzione del sistema omogeneo associato a (5.31) ossia dà le componenti di un vettore parallelo alla giacitura di $\mathbf{S}$. Tutto ciò prova che (5.32) ha per soluzioni tutte e sole le coordinate omogenee in $\mathcal{R}$ dei punti di $\mathbb{P}(\mathbf{S})$.

(b) Supponiamo $\mathbf{H}$ abbia equazioni (5.32) in $\mathcal{R}$. Allora, come è facile verificare, $\mathbf{S}$ avrà equazioni (5.31) in $\mathcal{R}$, ed è allora chiaro per la (a) che $\mathbb{P}(\mathbf{S}) = \mathbf{H}$. □

Proposizione 5.6.3. *(a) Sia* $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *un isomorfismo di spazi affini. Esiste una e una sola proiettività*

$$\mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \to \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$$

che prolunga la φ *e muta in sè stesso l'iperpiano all'infinito* $\mathbb{A}^n_\infty$*. Più precisamente se* φ *ha in un riferimento* $\mathcal{R}$ *equazioni*

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + c_n \end{cases}, \tag{5.33}$$

allora $\mathbb{P}(\varphi)$ *ha nel riferimento associato equazioni*

$$\begin{cases} \rho Y_0 = X_0 \\ \rho Y_1 = c_1X_0 + a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n \\ \ldots \\ \rho Y_n = c_nX_0 + a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\,. \tag{5.34}$$

(b) Viceversa se $\psi : \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \to \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ *è una proiettività che muta in sè* $\mathbb{A}^n_\infty$ *allora la sua restrizione ad* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *è una affinità* $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *tale che* $\mathbb{P}(\varphi) = \psi$.

Dimostrazione. (a) Data la φ avente in $\mathcal{R}$ equazioni date dalle (5.33), la $\mathbb{P}(\varphi)$ si definisce appunto come la proiettività avente nel riferimento associato equazioni (5.34). L'unicità è conseguenza del teorema fondamentale delle proiettività e si lascia per esercizio al Lettore.

(b) Sia $\mathcal{R}$ un riferimento di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e si consideri il riferimento proiettivo ad esso associato. Supponiamo la ψ abbia in detto riferimento equazioni del tipo:

$$\begin{cases} \rho Y_0 = a_{00}X_0 + a_{01}X_1 \ldots + a_{0n}X_n \\ \rho Y_1 = a_{10}X_0 + a_{11}X_1 \ldots + a_{1n}X_n \\ \ldots \\ \rho Y_n = a_{n0}X_0 + a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}. \tag{5.35}$$

Poiché ψ fissa l'iperpiano di equazione $X_0 = 0$ si verifica immediatamente che deve essere $a_{01} = \ldots = a_{0n} = 0$. Allora deve essere $a_{00} \neq 0$ e quindi possiamo supporre $a_{00} = 1$. In definitiva la ψ viene ad avere equazioni del tipo (5.34) e perciò $\psi = \tilde{\varphi}$, dove φ è l'affinità che ha in $\mathcal{R}$ equazioni date dalla (5.33). □

Si identifichi ora $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con un iperpiano di $\mathbb{A}' = \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$. Sia P un punto di $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$ che non appartiene a $\mathbb{A}^n_K$ e sia $\Sigma(P)$ la stella di rette di centro P. La stella $\Sigma(P)$ può essere identificata con $\mathbb{P}(\mathbf{V}(\mathbb{A}'))$ (associando ad ogni retta per P la sua giacitura) ed è quindi in modo naturale uno spazio proiettivo di dimensione n. D'altra parte, ad ogni punto proprio Q di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ resta associata la retta per P e Q; inoltre, ad ogni punto improprio di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ resta associata la retta per P con quella direzione. Abbiamo quindi una applicazione naturale:

$$\varphi : \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \to \Sigma(P). \tag{5.36}$$

Proposizione 5.6.4. *φ è una proiettività.*

Dimostrazione. A meno di isomorfismo possiamo supporre che $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sia l'iperpiano di $\mathbb{A}'$ di equazione $x_0 = 1$ e P è l'origine $\mathbf{0}$, sicché $\Sigma(P)$ si identifica in modo naturale con $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Un riferimento $\mathcal{R}$ su $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è quello in cui le coordinate di un punto $(1, x_1, \ldots, x_n)$ sono date proprio da $(x_1, \ldots, x_n)$. L'applicazione

$$\varphi_{\mathcal{R}}^{-1} : \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \Sigma(P) \tag{5.37}$$

è allora proprio coincidente con l'applicazione φ, da cui l'asserto. □

Proposizione 5.6.5. *Sia* $\mathbf{H}$ *un iperpiano dello spazio proiettivo numerico* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. *Allora* $\mathbb{A} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbf{H}$ *ha una struttura naturale di spazio affine di dimensione* n *su* $\mathbb{K}$ *tale che* $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$, con $\mathbf{W}$ sottospazio vettoriale di dimensione n di $\mathbb{K}^{n+1}$. Riguardiamo $\mathbb{K}^{n+1}$ come spazio affine di dimensione $n+1$ e consideriamo un iperpiano (affine) $\mathbf{S}$ di $\mathbb{K}^{n+1}$ parallelo a W ma non passante per $\mathbf{0}$. L'iperpiano $\mathbf{S}$, come sappiamo, è isomorfo a $\mathbf{W}$ come spazio affine. Consideriamo ora l'applicazione $\varphi : \mathbf{S} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ che ad ogni punto $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ associa il punto $[\mathbf{v}]$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. E' facile verificare (controlla!) che φ è iniettiva e la sua immagine è proprio $\mathbb{A} = \mathbb{P}(\mathbf{V}) \setminus \mathbf{H}$. Pertanto esiste su $\mathbb{A}$ una e una sola struttura di spazio affine tale che φ sia un isomorfismo. Dalla Proposizione 5.6.4 segue che $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}(\mathbf{V})$. □

Nell'Esercizio Svolto 5.26 si mostra in modo intrinseco (cioè senza fare ricorso a un riferimento) che, in uno spazio proiettivo, il complementare di un iperpiano ammette una struttura naturale di spazio affine.

Esercizi svolti

SPAZI E SOTTOSPAZI PROIETTIVI

Problema 5.1. Confronto tra punti *a) In $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, discuti se i seguenti punti sono distinti o coincidenti: $P[1,-7]$, $Q[2,0]$, $T[2,-21]$, $V[5,0]$, $S[3,-21]$.*
b) In $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, discuti se i seguenti punti sono distinti o coincidenti: $A[2-i,3+2i]$, $B[3+i,1+5i]$, $C[2+i,0]$, $D[3-4i,8+i]$, $E[1,0]$.

Soluzione. a) I punti distinti sono $P = S$, $Q = V$, T: infatti, $P = E$ perché $(3,-21) = 3(1,-7)$, $Q = V$ perché $(2,0) = \frac{2}{5}(5,0)$ mentre P, Q e T sono a due a due distinti perchè

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -21 \end{pmatrix} = 2, \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -21 \end{pmatrix} = 2.$$

b) I punti distinti sono $A = B = D$, $C = E$, T: infatti, $A = B$ perché $(3+i,1+5i) = (1+i)(2-i,3+2i)$ e $(3-4i,8+i) = (2-i)(2-i,3+2i)$, $C = E$ perché $(2+i,0) = (2+i)(1,0)$ mentre A ed E e sono distinti perchè

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-i & 3+2i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Problema 5.2. *In uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione n, considera un sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ di dimensione r (con $1 \le r \le n-1$). Dimostra che $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ è contenuto in un iperpiano.*

Soluzione. Ogni base $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_r$ di $\mathbf{W}$ può essere completata ad una n-pla $\mathbf{w}_0$, $\dots$, $\mathbf{w}_r$, $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ di vettori linearmente indipendenti (che non genera $\mathbf{V}$). Se poniamo $\mathbf{U} =< \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_{n-1} >$, il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{U})$ è un iperpiano contenente $\mathbb{P}(\mathbf{W})$.

Problema 5.3. Equazioni parametriche e omogenee *Considera il sottospazio $\mathbf{W}$ di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{w}_1 = (1,0,1,1)$ e $\mathbf{w}_2 = (2,0,-1,1)$. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, considera i sottospazi $\mathbf{S}_1 = \mathbb{P}(\mathbf{W})$, $\mathbf{S}_2 = \mathbb{P}(< \mathbf{w}_1 >)$ ed $\mathbf{S}_3$ definito dall'equazione $X_0 + 3X_1 + X_2 + X_3 = 0$.*
a) Determina la dimensione e la codimensione di $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ e $\mathbf{S}_3$, rispettivamente.
b) Determina una parametrizzazione di $\mathbf{S}_1$ ed una per $\mathbf{S}_3$.
c) Determina un sistema normale di equazioni omogenee per $\mathbf{S}_1$.

Soluzione. a) In base alla definizione (vedi formule (5.4) e (5.7)), si calcolano $\dim(\mathbf{S}_1) = \dim(\mathbf{W}) - 1 = 1$, codim $(\mathbf{S}_1) = \dim(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}) - \dim(\mathbf{S}_1) = 2$, $\dim(\mathbf{S}_2) = \dim(< \mathbf{w}_1 >) - 1 = 0$ (infatti, $\mathbf{S}_2$ è formato da un solo punto, $[\mathbf{w}_1]$). Per quanto riguarda $\mathbf{S}_3$, poichè esso è definito da una singola equazione, esso è un iperpiano, cioè codim $(\mathbf{S}_3) = 1$, $\dim(\mathbf{S}_3) = 3 - 1 = 2$.
b) Per determinare una parametrizzazione di $\mathbf{S}_1$, consideriamo la base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ di W: i punti di $\mathbf{S}_1$ sono tutti e soli i punti della forma: $[\mathbf{X}] = \lambda \mathbf{w}_1 + \mu \mathbf{w}_2 = \lambda(1,0,1,1) + \mu(2,0,-1,1) = (\lambda + 2\mu, 0, \lambda - \mu, \lambda + \mu)$ al variare di $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Per $\mathbf{S}_3$, determiniamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione che definisce $\mathbf{S}_3$, ed escludiamo la soluzione nulla: una parametrizzazione di $\mathbf{S}_3$ è data da

$$[\mathbf{X}] = \lambda_0(3,-1,0,0) + \lambda_1(1,0,-1,0) + \lambda_2(1,0,0,-1), \text{ con } (\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) \neq (0,0,0).$$

c) Poichè $\mathbf{S}_1$ ha codimensione 2, un sistema di equazioni normali che definisce $\mathbf{S}_1$ è composto da 2 equazioni. Per trovare un tale sistema, possiamo procedere in due modi.
Primo modo: a partire dall'equazione parametrica di S_1, procediamo eliminando i parametri. Da $\rho X_0 = \lambda + 2\mu$, $\rho X_1 = 0$, $\rho X_2 = \lambda - \mu$, $\rho X_3 = \lambda + \mu$, ricaviamo direttamente l'equazione $X_1 = 0$, (che è già libera da parametri). Sostituendo $\lambda = \rho X_2 + \mu$ nelle rimanenti equazioni, ricaviamo $\rho X_0 = \rho X_2 + 3\mu$, $\rho X_3 = \rho X_2 + 2\mu$. Ora sostituiamo $\mu = (\rho/2)(X_3 - X_2)$ nell'equazione $\rho X_0 = \rho X_2 + 3\mu$, e ricaviamo $\rho X_0 = \rho X_2 + 3(\rho/2)(X_3 - X_2)$, cioè, ricordando che ρ è per ipotesi una costante non nulla, $2X_0 + X_2 - 3X_3 = 0$. Dunque, un sistema normale di equazioni per $\mathbf{S}_1$ è dato da $X_1 = 0, 2X_0 + X_2 - 3X_3 = 0$.
Secondo modo: ogni equazione omogenea in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ è della forma

$$u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0.$$

Poichè $\mathbf{w}_1$ deve essere una soluzione, si deve avere $u_0 + u_2 + u_3 = 0$, mentre $\mathbf{w}_2$ come soluzione, impone la condizione $2u_0 - u_2 + u_3 = 0$. Dunque i coefficienti delle equazioni di $\mathbf{S}_1$ sono tutte e sole le soluzioni non nulle del sistema $u_0 + u_2 + u_3 = 0, 2u_0 - u_2 + u_3 = 0$, che ha come soluzioni indipendenti $(0,1,0,0)$ e $(2,0,1,-3)$. Ritroviamo quindi, come sistema di equazioni normali per $\mathbf{S}_1$ il sistema $X_1 = 0, 2X_0 + X_2 - 3X_3 = 0$. Notiamo che, ogni sistema equivalente di due equazioni omogenee sarebbe stato idoneo.

Problema 5.4. *In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, considera la retta r di equazione omogenea $3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$. Determina equazioni parametriche per r.*

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione $3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$ in $\mathbb{C}^3$ sono date da $(\lambda, -3\lambda + 2\mu, \mu) = \lambda(1,-3,0) + \mu(0,2,1)$, con $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Come equazioni parametriche di r troviamo dunque $[\mathbf{X}] = [\lambda, -3\lambda + 2\mu, \mu]$ con $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0}$.

Problema 5.5. Punti indipendenti
a) In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, per ciascun insieme di punti, discuti se è formato da punti indipendenti: $G_1 = \{Q_0 = [1,0,1], Q_1 = [1,-1,1]\}$, $G_2 = \{Q_0, Q_1, Q_2 = [1,1,1]\}$, $G_3 = \{Q_0, Q_1, Q_3 = [1,0,3]\}$, $G_4 = \{Q_0, Q_1, Q_3, Q_4 = [2,1,1]\}$.
b) In $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$, determina un insieme massimale di punti indipendenti nel sottospazio $\mathbf{Z}$ di equazioni $3X_0 - X_1 + X_2 - 2X_4 = 0, X_3 - X_4 = 0$.

Soluzione. a) I punti di G_1 (e, rispettivamente, di G_3) sono indipendenti perchè la matrice che ha per righe le coordinate omogenee dei punti corrispondenti ha rango 2 (rispettivamente, rango 3); i punti di G_2 sono dipendenti perchè le coordinate omogenee di Q_0, Q_1, Q_2 formano le righe di una matrice con determinante nullo, I punti di G_4 sono necessariamente dipendenti, perchè sono più della dimensione di $\mathbb{R}^3$.
b) Un insieme massimale di punti indipendenti in $\mathbf{Z}$ corrisponde ad una base dello spazio delle soluzioni del sistema $3X_0 - X_1 + X_2 - 2X_4 = 0, X_3 - X_4 = 0$, ed è formato da $5 - 2 = 3$ punti. Ad esempio, i punti $[1,3,0,0,0]$, $[1,0,-3,0,0]$, $[1,0,0,-3,-3]$ formano un sistema indipendente massimale.

SPAZIO CONGIUNGENTE E INTERSEZIONE

Problema 5.6. *In* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$*, siano assegnati i punti* $P[1+i,1,5,3]$ *e* $Q[3,i,1,i]$*. Determinare equazioni parametriche e omogenee della retta* r *per* P *e* Q*.*

Soluzione. Osserviamo che i due punti sono distinti (perché le loro coordinate omogenee non sono proporzionali) e dunque la retta è univocamente individuata. Le equazioni parametriche su r sono date da:

$$\begin{cases} \rho X_0 = (1+i)\lambda + 3\mu \\ \rho X_1 = \lambda + i\mu \\ \rho X_2 = 5\lambda + \mu \\ \rho X_3 = 3\lambda + i\mu \end{cases} \qquad (\lambda,\mu) \neq \mathbf{0}.$$

Per trovare un sistema di equazioni omogenee posso procedere a partire dalle equazioni parametriche, eliminando λ e μ. Alternativamente, basta prendere due equazioni lineari linearmente indipendenti, ottenute uguagliando a 0 i determinanti di sottomatrici 3×3 di

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1+i & 1 & 5 & 3 \\ 3 & i & 1 & i \end{pmatrix};$$

Ad esempio, vanno bene le equazioni $(1-5i)X_0 - (-14+i)X_1 + (-16+i)X_2 = 0$, $(5i-3)X_1 + 2i\,X_2 + (1-5i)X_3 = 0$ vanno bene.

Problema 5.7. *In* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$*, sia* s *la retta passante per i punti* $S[-1,1,-2]$ *e* $T[2,-3,2]$*.*
a) Determina equazioni parametriche e omogenee per la retta s*.*
b) Sia r *la retta di equazione omogenea* $3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$*. Determina l'intersezione tra le rette* r *e* s*.*

Soluzione. a) Ragionando come nell'Osservazione 5.8.6, si ricavano per s equazioni parametriche

$$\rho(X_0,X_1,X_2] = \sigma(-1,1,-2) + \tau(2,-3,2) = (-\sigma+2\tau, \sigma-3\tau, -2\sigma+2\tau)$$

al variare di $(\sigma,\tau) \neq (0,0)$ ed equazione omogenea:

$$det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} X_0 - det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X_1 + det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X_2 =$$

$$= -4X_0 - 2X_1 + X_2 = 0.$$

b) **Primo modo** L'intersezione tra r e s è definita dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} 3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0 \\ -4X_0 - 2X1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

di rango 2 in 3 indeterminate. Per il teorema di Rouché-Capelli, le soluzioni sono terne tra loro proporzionali. L'intersezione tra r e s è dunque costituita da un unico punto, le cui coordinate omogenee $[-3,5,-2]$ si ricavano come nell'Osservazione 5.8.7:

$$X_0 = det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -3; X_1 = -det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = 5; X_2 = det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = -2.$$

Secondo modo I punti di s sono i punti della forma $[-\sigma+2\tau, \sigma-3\tau, -2\sigma+2\tau]$, al variare di $(\sigma,\tau) \neq (0,0)$. Un tale punto appartiene (anche) ad r se ne soddisfa l'equazione omogenea; sostituendole equazioni parametriche dei punti di s nell'equazione omogenea di r si ricava l'equazione:

$$3(-\sigma+2\tau) + (\sigma-3\tau) - 2(-2\sigma+2\tau) = 2\sigma - \tau = 0$$

da interpretarsi come equazione nei parametri $[\sigma,\tau]$ della retta s. Una soluzione particolare è data da $\sigma = 1$, $\tau = 2$, cui corrisponde il punto

$$[-1+2\cdot 2, 1-3\cdot 2, -2+2\cdot 2] = [3,-5,2] = [-3,5,-2].$$

Problema 5.8. *Sia* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *uno spazio proiettivo di dimensione* n *e sia* $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ *un sottospazio di dimensione* s*. Mostra che, se* $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ *non è contenuto in un iperpiano* $\mathbf{H}$*, allora* $dim(\mathbb{P}(\mathbf{W}) \cap \mathbf{H}) = s-1$.

Soluzione. Segue immediatamente dalla Formula di Grassmann proiettiva (Teorema 5.3.8), o da una dimostrazione diretta.

Problema 5.9. *Sia* $\mathrm{J} \neq \emptyset$ *un sottinsieme qualsiasi di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$*. Sia* $<\mathrm{J}>$ *il sottospazio generato da* J *(c.f. Definizione 5.3.4).*
a) Mostra che $<\mathrm{J}>$ *è il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene* J.
b) Sia $\mathbf{W}$ *un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{V}$*. Allora risulta:* $\mathrm{J} \subseteq \mathbb{P}(\mathbf{W})$ *se e solo se* $\pi^{-1}(\mathrm{J}) \subseteq \mathbf{W}$.

Soluzione. a) $<\mathrm{J}>$ è un sottospazio proiettivo perchè è intersezione di sottospazi proiettivi. Se $\mathbf{Z}$ è un sottospazio proiettivo che contiene J, allora $<\mathrm{J}>\subseteq \mathbf{Z}$. Ovviamente $<\mathrm{J}>=\mathrm{J}$ se e solo se J è un sottospazio proiettivo.
b) $\Rightarrow$) Se $\mathrm{J} \subseteq \mathbb{P}(\mathbf{W})$, allora $\pi^{-1}(\mathrm{J}) \subseteq \pi^{-1}(\mathbb{P}(\mathbf{W})) = \mathbf{W}\backslash\{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbf{W}$.
$\Leftarrow$) Sia $\pi^{-1}(\mathrm{J}) \subseteq \mathbf{W}$; allora vale, dato che $\mathbf{0} \notin \pi^{-1}(\mathrm{J})$, $\pi^{-1}(\mathrm{J}) \subseteq \mathbf{W}\backslash\{\mathbf{0}\}$, e quindi $\pi(\pi^{-1}(\mathrm{J})) = \mathrm{J} \subseteq \pi(\mathbf{W}\backslash\{\mathbf{0}\}) = \mathbb{P}(\mathbf{W})$.

Problema 5.10. Fascio di rette per un punto *Determinare una equazione omogenea per ogni retta di* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *passante per il punto* $D[3,-1,5]$.

Soluzione. Ogni retta del piano ha equazione omogenea $aX_0+bX_1+cX_2 = 0$ (con a, b, c non tutti nulli). Una tale retta passa per D se e solo se le coordinate omogenee di D sono soluzione dell'equazione omogenea, cioè quando $3a - b + 5c = 0$. Tale relazione va interpretata come equazione nei coefficienti a, b, c dell'equazione. Le soluzioni (a,b,c) formano un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{C}^3$, una cui base è data da $(1,3,0)$ e $(0,5,1)$; soluzioni proporzionali corrispondono alla stessa retta e la soluzione nulla non corrisponde a nessuna retta. Si ricava che ogni retta per D ha equazione della forma:

$$\lambda(X_0+3X_1) + \mu(5X_1+X_2) = 0, \qquad (\lambda,\mu) \neq (0,0)$$

Si dice che tali rette formano un *fascio di rette*.

Problema 5.11. Rette complanari o sghembe *In* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$*, discutere se sono complanari o sghembe le seguenti rette* $r : 3X_0 + X_1 = 0, X_0 - X_2 + X_3 = 0,$ $s : X_1 + X_2 - X_3 = 0, X_0 + X_3 = 0.$

Soluzione. **Primo modo** Su ciascuna delle due rette, si prendono due punti distinti: ad esempio, $A_1[0,0,1,1]$, $A_2[1,-3,-1,0] \in r$ e $B_1[0,1,-1,0]$, $B_2[-1,0,1,1] \in s$. Le due rette sono sghembe se e solo se i quattro punti A_1, A_2, B_1, B_2 non sono complanari, cioè se

$$rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Poiché il rango è effettivamente 4, le rette r e s sono sghembe.
Secondo modo Le rette r e s sono complanari se e solo se $r \cap s \neq \emptyset$, se e solo se il sistema dato dalle 4 equazioni omogenee delle rette ammette una soluzione nulla, cioè tale sistema ha rango minore di 3. Poiché

$$rg \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

le rette sono sghembe.

PROIETTIVITÀ E SOTTOSPAZI

Problema 5.12. *Si consideri la proiettività* φ *di* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ *in sè di equazioni*

$$\begin{cases} \rho Y_1 = X_1 + X_2 \\ \rho Y_2 = X_2 + X_3 \\ \rho Y_3 = X_3 \end{cases}$$

e la retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ *di equazione* $3X_1 + 2X_2 + X_3 = 0$*. Determinare una equazione omogenea per* $\varphi(r)$*.*

Soluzione. La proiettività φ^{-1} ha equazioni

$$\begin{cases} \kappa X_1 = Y_1 - Y_2 + Y_3 \\ \kappa X_2 = Y_2 - Y_3 \\ \kappa X_3 = Y_3 \end{cases}$$

sicché la retta $\varphi(r)$ ha equazione

$$3(Y_1 - Y_2 + Y_3) + 2(Y_2 - Y_3) + Y_3 = 0 \Leftrightarrow 3Y_1 - Y_2 + 2Y_3 = 0.$$

Problema 5.13. *Sia* $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ *una proiettività avente equazioni*

$$\begin{cases} \rho Y_0 = X_0 - X_1 \\ \rho Y_1 = X_0 + X_1 + 2X_2 \\ \rho Y_2 = X_1 \end{cases} \tag{5.38}$$

a) Determinare equazioni parametriche per l'immagine tramite φ della retta r di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di equazioni parametriche $\rho(X_0, X_1, X_2) = (\lambda, 2\lambda - \mu, 2\mu)$ $(\rho \neq 0,\ (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.
b) Determinare equazioni omogenee per l'immagine tramite φ della retta s di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di equazione $X_0 - X_1 + 3X_2 = 0$.
c) Determinare equazioni omogenee per l'immagine tramite φ della retta t di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ passante per $D[6, -1, 0]$ e $E[1, -2, 1]$.

Soluzione. a) È sufficiente applicare φ ad ogni punto di r, sostituendo l'espressione data dalle equazioni parametriche di r nelle equazioni di φ:

$$\varphi([\lambda, 2\lambda - \mu, 2\mu]) = [\lambda - (2\lambda - \mu), \lambda + (2\lambda - \mu), 2\lambda - \mu] = [-\lambda + \mu, 3\lambda - \mu), 2\lambda - \mu]$$

Si ricavano le seguenti equazioni parametriche per $\varphi(r)$:

$$\rho(X_0, X_1, X_2) = (-\lambda + \mu, 3\lambda - \mu), 2\lambda - \mu) \qquad (\rho \neq 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

b) Poichè φ è un isomorfismo, un punto $P[\mathbf{Y}]$ appartiene a $\varphi(r)$ se la sua antiimmagine (che coincide con la sua immagine attraverso la proiettività inversa φ^{-1}) appartiene a r, cioè $\varphi^{-1}([\mathbf{Y}])$ soddisfa l'equazione omogenea di r. La proiettività φ^{-1} ha equazioni

$$\begin{cases} \kappa X_0 = -2Y_0 - 2Y_2 \\ \kappa X_1 = -2Y_2 \\ \kappa X_2 = Y_0 - Y_1 + 2Y_2 \end{cases}$$

sicché la retta $\varphi(r)$ ha equazione omogenea

$$(-2Y_0 - 2Y_2) - (-2Y_2) + 3(Y_0 - Y_1 + 2Y_2) = 0 \text{ cioè } Y_0 - 3Y_1 + 6Y_2 = 0.$$

c) L'immagine $\varphi(t)$ è necessariamente una retta, che deve coincidere con la retta per $\varphi(D) = [7, 5, -1]$ e $\varphi(E) = [3, 1, -2]$, che ha equazione omogenea det $\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 7 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -9X_0 + 11X_1 - 8X_2 = 0.$

TEOREMA FONDAMENTALE DELLE PROIETTIVITÀ

Problema 5.14. Proiettività della retta *a) Determina le equazioni della proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1, 0]) = [2, 1]$, $\varphi([0, 1]) = [-1, 1]$, $\varphi([1, 1]) = [3, -2]$. E' vero che $\varphi([2, -1]) = [14, 18]$?*
b) Determina le equazioni della proiettività $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\psi([2, 1]) = [1, 0]$, $\psi([-1, 1]) = [0, 1]$, $\psi([3, -2]) = [1, 1]$.

Soluzione. a) I tre punti $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$,$C = [1, 1]$ e i tre punti $A' = [2, 1]$, $B' = [-1, 1]$, $C' = [3, -2]$ sono a due a due distinti, quindi l'esistenza della proiettività cercata φ segue dal teorema fondamentale delle proiettività della retta proiettiva (Teorema 5.7.15). Posto $\varphi([X_0, X_1]) = [Y_0, Y_1]$, per definizione di proiettività esistono una matrice invertibile $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix}$ ed uno scalare non nullo ρ tali che $\begin{cases} \rho Y_0 = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 \\ \rho Y_1 = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 \end{cases}$. La richiesta $\varphi([1, 0]) = [2, 1]$ equivale ad imporre che la prima colonna di $\mathbf{M}$ sia proporzionale alle coordinate omogenee $(2, 1)$ di A' (con costante di proporzionalità non nulla). Analogamente, la richiesta $\varphi([0,1]) = [-1,1]$ equivale ad imporre che la seconda colonna di M sia proporzionale alle coordinate omogenee $(-1,1)$ di B' (con costante di proporzionalità non nulla). Esistono dunque scalari non nulli λ e μ tali che $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$. La richiesta $\varphi([1,1]) = [3,-2]$ equivale al fatto che $\mathbf{M}(1,1)^t$ sia proporzionale a $(3,-2)^t$.

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0.$$

Gli scalari cercati sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu - 3\rho = 0 \\ \lambda + \mu + 2\rho = 0 \end{cases}'$$

le cui soluzioni non nulle sono tutte tra loro proporzionali, e proporzionali alla soluzione data da

$$\lambda_0 = det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \mu_0 = -det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -7, \rho_0 = det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Sostituendo i valori λ_0 e μ_0 in M, si ricavano le equazioni di φ:

$$\rho\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}.$$

Per controllare se $\varphi([2,-1]) = [14,18]$, basta sostituire $X_0 = 2$, $X_1 = -1$ nelle equazioni di φ. Si ricava che $\varphi([2,-1]) = [7,9] = [14,18]$. La risposta è positiva.

b) La proiettività ψ è l'inversa della proiettività φ costruita al punto precedente. Le equazioni di ψ sono della forma $\tau\mathbf{Y} = \mathbf{NX}$, ove la matrice $\mathbf{N}$ è un multiplo non nullo dell'inversa di $\mathbf{M}$ (definita al punto precedente). Si ricava, ad esempio, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

□

Problema 5.15. *Determinare la proiettività* $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ *tale che* $\varphi([-2,1]) = [1,2]$, $\varphi([1,3]) = [2,5]$, $\varphi([1,-2]) = [1,-1]$.

Soluzione. I tre punti $A = [-2,1]$, $B = [1,3]$,$C = [1,-2]$ e i tre punti $A' = [1,2]$, $B' = [2,5]$, $C' = [1,-1]$ sono a due a due distinti, quindi l'esistenza della proiettività cercata φ segue dal teorema fondamentale delle proiettività (Teorema 5.7.15). La proiettività φ può essere determinata come composizione $\psi_2 \circ \psi_1$ di due proiettività, ove ψ_1 sia definita da

$$\psi_1([-2,1]) = [1,0], \psi_1([1,3]) = [0,1], \psi_1([1,-2]) = [1,1]$$

mentre ψ_2 sia definita da

$$\psi_1([1,0]) = [1,2], \psi_1([0,1]) = [2,5], \psi_1([1,1]) = [1,-1]$$

Osserviamo che le equazioni delle proiettività ψ_1 e ψ_2 possono essere ricavate come nell'Esercizio svolto 5.27. In dettaglio, posti $\psi_1([X_0,X_1]) = [X'_0,X'_1]$ e $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, esiste uno scalare non nullo ρ tale che

$$\rho \begin{pmatrix} X_0' \\ X_1' \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, posto $\psi_2([X_0', X_1']) = [Y_0, Y_1]$ e $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, esiste uno scalare non nullo ν tale che

$$\nu \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} X_0' \\ X_1' \end{pmatrix}.$$

La matrice M della composizione $\varphi([X_0, X_1]) = [Y_0, Y_1]$ si ricava tramite la relazione $\mathbf{M} = \mathbf{T}\,\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ -17 & -5 \end{pmatrix}$. Le equazioni di φ sono quindi

$$\tau \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ -17 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}.$$

□

Problema 5.16. Proiettività del piano *In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, considera i punti $A[1,1,0]$, $B[1,2,1]$, $C[1,-1,-1]$, $D[1,0,1]$.*
a) Mostra che i punti A, B, C, D sono in posizione generale.
b) Determina le equazioni della proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1,0,0]) = A$, $\varphi([0,1,0]) = B$, $\varphi([0,0,1]) = C$, $\varphi([1,1,1]) = D$.

Soluzione. a) In base alla Definizione 5.3.5, occorre mostrare che, comunque scelti 3 punti distinti nella quaterna, essi risultano indipendenti. Poichè $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, i punti sono in posizione generale.
b) Poichè A, B, C, D sono in posizione generale per quanto provato nel punto precedente, esiste una ed una sola proiettività φ con le proprietà richieste in base al Teorema fondamentale delle proiettività 5.8.12. Sia $\mathbf{M}$ una matrice tale che $\varphi([\mathbf{X}]) = [\mathbf{MX}] = [\mathbf{Y}]$. La condizione $\varphi([1,0,0]) = A$ comporta che la prima colonna di $\mathbf{M}$ è proporzionale al vettore dele coordinate di A; analogamente le condizioni $\varphi([0,1,0]) = B$ e $\varphi([0,0,1]) = C$ comportano che la seconda e la terza colonna di $\mathbf{M}$ sono proporzionali, rispettivamente, ai vettori delle coordinate di B e C. Dunque $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda & 2\mu & -\nu \\ 0 & \mu & -\nu \end{pmatrix}$ $\exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ La condizione $\varphi([1,1,1]) = [\mathbf{M}(1,1,1)^t] = D$ comporta l'esistenza di uno scalare non nullo ρ tale che $\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = \rho \\ \lambda + 2\mu - \nu = 0 \\ \mu - \nu = \rho \end{cases}$, cioè $\begin{cases} \lambda + \mu + \nu - \rho = 0 \\ \lambda + 2\mu - \nu = 0 \\ \mu - \nu - \rho = 0 \end{cases}$; una soluzione di tale sistema è data da $\lambda = 4$, $\mu = -3$,$\nu = -2$, $\rho = -1$. Sostituendo i valori trovati per λ, μ, ν nella matrice, si ricava

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e le equazioni di } \varphi \text{ sono:} \rho \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

PROIETTIVITÀ DEL PIANO E COPPIE DI RETTE

Assegnate due rette distinte r e s in $\mathbb{P}^2$, si vuole determinare una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ che muta le due rette r e s in due rette distinte r' e s' preassegnate.

Notiamo che, per l'Osservazione 5.8.7, le rette r e s hanno un unico punto di intersezione, che denotiamo con H; analogamente, le rette r' e s' hanno un unico punto di intersezione, che denotiamo con H'. Osserviamo inoltre che ogni proiettività manda punti allineati in punti allineati e che, per il Teorema fondamentale delle proiettività 5.8.12, una proiettività del piano in se stesso è univocamente fissata se ne si conoscono le immagini di 4 punti in posizione generale.

È possibile dunque utilizzare una delle due seguenti strategie, osservando che le richieste non individuano univocamente φ. In particolare, assegnata una coppia di rette distinte r e s:

- In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ esiste sempre un riferimento in cui le rette abbiano equazione $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$. Inoltre esiste anche un riferimento in cui le rette abbiano equazioni $\tilde{Y}_1 + i\tilde{Y}_2 = 0$, $\tilde{Y}_1 - i\tilde{Y}_2 = 0$.
- In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ esiste sempre un riferimento in cui le rette abbiano equazione $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$. Inoltre esiste anche un riferimento in cui le rette abbiano equazioni $\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 = 0$, $\tilde{Y}_1 - \tilde{Y}_2 = 0$.

Primo modo Si fissano due punti distinti $A \neq H$ e $B \neq H$ in r e due punti distinti $A' \neq H'$ e $B' \neq H'$ in r'. Imponendo che $\varphi(A) = A'$ e $\varphi(B) = B'$ ci si assicura che $\varphi(r) = r'$. Analogamente, si fissano due punti distinti $C \neq H$ e $D \neq H$ in s e due punti distinti $C' \neq H'$ e $D' \neq H'$ in r'. Imponendo che $\varphi(C) = C'$ e $\varphi(D) = D'$ ci si assicura che $\varphi(r) = r'$, Il fatto che nessuno tra A, B, C, D coincida con H e che nessuno tra A', B', C', D' coincida con H' assicura che le due quaterne sono in posizione generale, ed è possibile applicare il Teorema fondamentale delle proiettività. Per un esempio, si rimanda all'Esercizio Svolto 5.17.
Secondo modo Si osserva che, necessariamente, deve valere la condizione $\varphi(H) = H'$. Si fissano un punto $A \neq H$ in r e un punto $A' \neq H'$ in r'. Imponendo che $\varphi(A) = A'$ ci si assicura che $\varphi(r) = r'$. Analogamente, si fissano un punto $B \neq H$ in r e un punto $B' \neq H'$ in r'. Imponendo che $\varphi(B) = B'$ ci si assicura che $\varphi(r) = r'$. Si scelgono $D \notin r \cap s$, con D non allineato a A e B, ed un punto e $D' \notin r' \cap s'$, con D non allineato a A' e B'. La scelta dei punti A, B, H, D e A', B', H', D' assicura che le due quaterne sono in posizione generale, ed è possibile applicare il Teorema fondamentale delle proiettività. Per esempi numerici, vedere gli Esercizi Svolti 5.18 e 5.19.

Problema 5.17. *Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, si considerino le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_1 + X_2 = 0$ e $s : X_0 = 0$ rispettivamente. Determinare le equazioni di una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(r)$ sia la retta r' di equazione $X_1 + X_2 = 0$ e $\varphi(s)$ sia la retta s' passante per $C'[1, 0, 3]$ e $D'[1, 1, 1]$.*

Soluzione. Si fissino i punti $A[1, 0, 0]$ e $B[1, 1, 1]$ in r, osservando che non soddisfano l'equazione di s. Si fissino inoltre i punti $A'[0, 0, 1]$ e $B'[1, -1, 0]$ in r', osservando ciascuno di essi è indipendente da C' e D' (e dunque A' e B' non appartengono a s', e i punti A', B', C', D' sono in posizione generale). Infine, si scelgano due punti distinti $C[0, 1, 0]$ e $D[0, 0, 1]$ in s, osservando che i punti A, B, C, D risultano essere i punti fondamentali e il punto unità e, in particolare, sono in posizione generale.

Applicando il Teorema fondamentale delle proiettività 5.8.12, risulta determinata una unica proiettività φ tale che $\varphi(A) = A'$, $\varphi(C) = C'$, $\varphi(D) = D'$, $\varphi(B) = B'$.

Procedendo come nell'Esercizio Svolto 5.16, si mostra che φ ha equazioni $\rho\mathbf{Y} = \mathbf{MX}$, con

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.18. *Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, si considerino le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_0 - X_1 = 0$ e $s : X_0 + X_2 = 0$ rispettivamente.*
a) Mostrare che le rette r e s sono distinte e determinare il punto di intersezione.
b) Determinare un cambio di coordinate omogenee $[\mathbf{Y}] = [\mathbf{MX}]$ rispetto al quale la retta r abbia equazione omogenea $Y_1 = 0$, mentre la retta s abbia equazione omogenea $Y_0 = 0$.

Soluzione. a) Per mostrare che le rette sono distinte, basta controllare che le equazioni omogenee di r e s non siano proporzionali, il che è vero perché rg $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Le coordinate omogenee del loro punto di intersezione si determinano, ad esempio, procedendo come nel punto c) dell'Esercizio Svolto 5.4, prendendo i minori, a segno alterno, ottenuti cancellando a turno le colonne della matrice dei coefficienti. Risulta

$$H = [det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}] = [-1, -1, 1] = [1, 1, -1].$$

b) Si fissi $C = H$ e si scelgano $A \neq C$ in r, $B \neq C$ in s e D esterno a r e s (in tal modo i punti A, B, C e D risultano in posizione generale). Il cambio di coordinate cercato può essere ottenuto imponendo che l'immagine di C sia l'intersezione $C'[0, 0, 1]$ (è l'intersezione tra le immagini richieste), l'immagine di A sia un punto $A' \neq C'$ con $X_2 = 0$, l'immagine di B sia un punto $B' \neq C'$ con $X_1 = 0$, l'immagine di D sia un punto D' con prima e seconda coordinata entrambe non nulle. Ad esempio, è possibile scegliere $A[1, 1, 0]$, $B[0, 1, 0]$, $C[1, 1, -1] = H$ e $D[1, 0, 1]$ siano due punti distinti $A'[1, 0, 0]$, $B'[0, 1, 0]$, $C'[0, 0, 1]$ e $D'[1, 1, 1]$.

Cerchiamo, per semplicità il cambio inverso $[\mathbf{X}] = [\mathbf{NY}]$. La matrice $\mathbf{N}$ sarà della forma

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \nu \\ \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \qquad \lambda\mu\nu \neq 0$$

con la condizione che esista $\rho \neq 0$ tale che $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ siano soluzione di

$$\begin{cases} \lambda + \nu - \rho = 0 \\ \lambda + \mu + \nu - \rho = 0\,. \\ -\nu - \rho = 0 \end{cases}$$

Una soluzione particolare $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \rho_0)$ si trova considerando i minori 3×3, con segni alterni, ottenuti cancellando le colonne della matrice dei coefficienti del sistema. Risulta $\lambda_0 = 2$, $\mu_0 = -1$, $\nu_0 = -1$, $\rho_0 = 1$, di modo che

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{M}$ cercata è un qualsiasi multiplo scalare non nullo dell'inversa di $\mathbf{N}$. Ad esempio,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.19. *Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, si considerino le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_0 + X_2 = 0$ e $s : X_0 - X_1 = 0$ rispettivamente. Determinare una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(r)$ sia la retta r' di equazione $X_0 + iX_1 = 0$ e $\varphi(s)$ sia la retta s' di equazione $X_0 - iX_1 = 0$.*

Soluzione. Osserviamo che le rette r e s sono distinte tra loro e si intersecano nel punto $H[1, 1, -1]$; anche r' e s' sono distinte, e si intersecano in $H'[0, 0, 1]$. Le coordinate omogenee del loro punto di intersezione si determinano, ad esempio, procedendo come nel punto c) dell'Esercizio Svolto 5.4, prendendo i minori, a segno alterno, ottenuti cancellando a turno le colonne della matrice dei coefficienti. Risulta

$$H = [det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}] = [-1, -1, 1] = [1, 1, -1].$$

b) Si fissi $C = H$ e si scelgano $A \neq C$ in r, $B \neq C$ in s e D esterno a r e s (in tal modo i punti A, B, C e D risultano in posizione generale). Il cambio di coordinate cercato può essere ottenuto imponendo che l'immagine di C sia l'intersezione $C'[0, 0, 1]$ (è l'intersezione tra le immagini richieste), l'immagine di A sia un punto $A' \neq C'$ con $X_1 = 0$, l'immagine di B sia un punto $B' \neq C'$ con $X_0 = 0$, l'immagine di D sia un punto D' con prima e seconda coordinata entrambe non nulle. Ad esempio, è possibile scegliere $A[1, 1, 0]$, $B[0, 1, 0]$, $C[1, 1, -1] = H$ e $D[1, 0, 1]$ siano due punti distinti $A'[1, 0, 0]$, $B'[0, 1, 0]$, $C'[0, 0, 1]$ e $D'[1, 1, 1]$.

Cerchiamo, per semplicità il cambio inverso $[\mathbf{X}] = [\mathbf{NY}]$. La matrice $\mathbf{N}$ sarà della forma

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \nu \\ \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \quad \lambda\mu\nu \neq 0$$

con la condizione che esista $\rho \neq 0$ tale che $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ siano soluzione di

$$\begin{cases} \lambda + \nu - \rho = 0 \\ \lambda + \mu + \nu - \rho = 0 \\ -\nu - \rho = 0 \end{cases}.$$

Una soluzione particolare $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \rho_0)$ si trova considerando i minori 3×3, con segni alterni, ottenuti cancellando le colonne della matrice dei coefficienti del sistema. Risulta $\lambda_0 = 2$, $\mu_0 = -1$, $\nu_0 = -1$, $\rho_0 = 1$, di modo che

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{M}$ cercata è un qualsiasi multiplo scalare non nullo dell'inversa di N. Ad esempio,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

PROIETTIVITÀ E SOTTOSPAZI FISSI

Problema 5.20. Proiettività di $\mathbb{P}^3$ e coppie di rette *Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, si considerino due rette sghembe r e s.*
a) Mostra che esiste un riferimento nel quale r e s hanno, rispettivamente, equazioni omogenee $r : X_0 = X_1 = 0$ e $s : X_2 = X_3 = 0$.
b) Siano ora r la retta di equazioni $X_0 + X_2 + X_3 = 0, X_1 + X_3 = 0$ e s di equazioni $X_0 + X_1 + X_2 - X_3 = 0, X_1 - X_3 = 0$. Determina le equazioni di una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tale che $\varphi(r)$ abbia equazioni $r : X'_0 = X'_1 = 0$ e $\varphi(s)$ abbia equazioni $s : X'_2 = X'_3 = 0$.

Soluzione. a) Osserviamo che le rette r e s sono distinte tra loro e non hanno punti di intersezione. Se $R_0 = [\mathbf{v}_0]$ e $R_1 = [\mathbf{v}_1]$ sono due punti distinti di r e $S_0 = [\mathbf{u}_0]$ e $S_1 = [\mathbf{u}_1]$ sono due punti distinti di s, i quattro punti R_0, R_1, S_0, S_1 sono indipendenti in $\mathbb{P}^3$. Per il teorema fondamentale dei riferimenti, esiste dunque un riferimento nel quale i punti R_0, R_1, S_0, S_1 sono i punti fondamentali. La scelta di un tale riferimento dipende dalla scelta di un punto unità, e quindi non è univoca.
b) Scegliamo in r due punti distinti $R_0 = [1, 1, 0, -1]$, $R_1 = [0, 1, 1, -1]$ e in s due punti distinti $S_0 = [1, 1, 0, 1]$, $S_1 = [0, 1, 0, 1]$. Consideriamo la proiettività $\psi : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ definita da $\mathbf{X}' \mapsto \mathbf{A}\mathbf{X}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, verifica $\psi([1, 0, 0, 0]) = R_0$, $\psi([0, 1, 0, 0]) = R_1$, $\psi([0, 0, 1, 0]) = S_0$, $\psi([0, 0, 0, 1]) = S_1$. L'inversa di ψ ha le proprietà richieste, dunque possiamo porre $\varphi = \psi^{-1}$. Le equazioni di φ sono $\rho\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}$.

Definizione 5.6. Sia $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ una proiettività di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Un punto P è *fisso* (o *unito*) per φ se $\varphi(P) = P$. Un sottospazio $\mathbf{Z}$ è *fisso* (o *unito*) per φ se $\varphi(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Un sottospazio $\mathbf{Z}$ è *puntualmente fisso* (o *fisso punto a punto*) se $\varphi(P) = P\ \forall P \in \mathbf{Z}$.

Ricordiamo che l'applicazione lineare $\varphi_l : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ associata ad una proiettività $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ è necessariamente un isomorfismo. Un punto $P[\mathbf{v}]$ è fisso per φ se e solo se il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore per φ_l, cioè $\varphi_l(\mathbf{v} = a\mathbf{v}$ per un opportuno $a \in \mathbb{K}$. Un sottospazio $\mathbf{Z} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ è fisso se e solo se $\mathbf{W}$ è invariante per φ_l. Un sottospazio $\mathbf{Z} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ è fisso punto per punto se e solo se $\mathbf{W}$ è contenuto in un autospazio di φ_l, cioè se $\mathbf{W}$ è invariante rispetto a φ_l e la restrizione $\varphi_{l|} : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$ è una omotetia (cioè esiste $a \in \mathbb{K}$ con $\varphi_l(\mathbf{w}) = a\mathbf{w}\ \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$).

Problema 5.21. *Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, si considerino due rette sghembe r. Mostra che esiste una proiettività non identica $\varphi : \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ per la quale r e s sono puntualmente fissi.*

Soluzione. Ragionando come nell'Esercizio svolto 5.20, sappiamo che esiste un riferimento nel quale r ha equazioni $X_0 = X_1 = 0$, mentre s ha equazioni $X_2 = X_3 = 0$.

L'applicazione lineare associata $\varphi_l : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ che ha, nel riferimento scelto, la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, induce una proiettività φ con le proprietà richieste.

PROIEZIONI E SEZIONI

Problema 5.22. Proiezione centrale *Sia fissato un riferimento nel piano affine reale. Si considerino la retta r di equazione $x_2 = 0$ e la retta s di equazione $x_1 = 0$. Sia inoltre fissato il punto $P(p_1, p_2)$ non appartenente né ad r né ad s. Si consideri la seguente costruzione: se Q è un punto di r, si denoti con r_{PQ} la retta per P e per Q; la posizione*

$$\begin{aligned} r \setminus \{(p_1, 0)\} &\to s \\ Q(q_1, 0) &\mapsto r_{PQ} \cap s \end{aligned} \tag{5.39}$$

definisce una applicazione detta proiezione centrale da P di r su s.

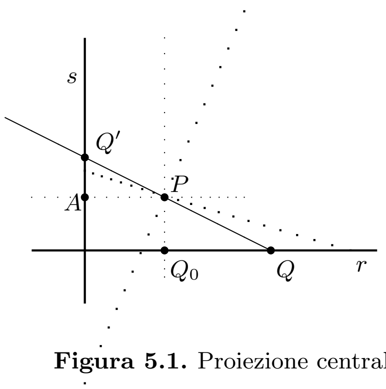

Figura 5.1. Proiezione centrale da un punto P

a) Determinare esplicitamente la proiezione centrale, nei termini delle coordinate, e discuterne iniettività e suriettività.
b) Discutere cosa accade all'immagine di Q quando l'ascissa di Q tende a $+\infty$ o a $-\infty$.
c) Discutere cosa accade all'immagine di Q quando l'ascissa di Q tendo a p_1.
d) Discutere se la proiezione centrale si estende a proiettività tra i completamenti proiettivi di r e s. In caso positivo, determinare le equazioni di tale proiettività.

Soluzione. a) L'intersezione $r_{PQ} \cap s$ è non vuota, tranne quando $Q = Q_0(p_1, 0)$, perché in tal caso la retta r_{PQ} risulta parallela ad s. Se $Q(q_1, 0)$, la retta r_{PQ} ha equazione cartesiana della forma:

$$det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & 0 \end{pmatrix} = p_2 x_1 - (p_1 - q_1) x_2 - q_1 p_2 = 0$$

L'intersezione di r_{PQ} con s è data da $p_2 x_1 - (p_1 - q_1) x_2 - q_1 p_2 = 0, x_1 = 0$: tale sistema è risolubile se e solo se $p_1 \neq q_1$ (come ci aspettavamo) e in tal caso l'intersezione è data dal punto $(0, \frac{q_1 p_2}{q_1 - p_1})$. La proiezione centrale è descritta quindi da

$$\begin{aligned} r \setminus \{(p_1, 0)\} &\to s \\ Q(q_1, 0) &\mapsto r_{PQ} \cap s = Q'(0, \tfrac{q_1 p_2}{q_1 - p_1}). \end{aligned} \tag{5.40}$$

Tale applicazione è iniettiva ma non suriettiva: infatti il punto $A(0, p_2)$ non appartiene all'immagine.

b) Osserviamo che, facendo crescere indefinitamente l'ascissa q_1 di Q, l'immagine Q' si avvicina al punto $(0, p_2)$ "dall'alto" ($\lim_{q_1 \to +\infty} \frac{q_1 p_2}{q_1 - p_1} = p_2$). Analogamente, facendo decrescere indefinitamente l'ascissa q_1 di Q, l'immagine Q' si avvicina al punto $(0, p_2)$ "dal basso" ($\lim_{q_1 \to -\infty} \frac{q_1 p_2}{q_1 - p_1} = p_2$).

In entrambi i casi, la retta r_{PQ} "tende" verso la retta per P e parallela alla retta r.

c) Se invece facciamo avvicinare Q a $Q_0(p_1, 0)$ da destra, l'immagine Q' assume un'ordinata arbitrariamente grande ($\lim_{q_1 \to ^+ p_1} \frac{q_1 p_2}{q_1 - p_1} = +\infty$). Analogamente, facendo avvicinare Q a Q_0 da sinistra, l'immagine Q' assume un'ordinata arbitrariamente piccola ($\lim_{q_1 \to ^- p_1} \frac{q_1 p_2}{q_1 - p_1} = -\infty$). In entrambi i casi, la retta r_{PQ} "tende" verso la retta per P e parallela alla retta s.

d) Un sistema di riferimento sulla retta affine r è dato da $Q(q_1, 0) \mapsto q_1$. Il corrispondente sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ sul completamento proiettivi $\mathbb{P}(r)$ è dato da

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r) &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ r \ni Q(q_1) &\mapsto [X_0, X_1] = [1, q_1] \\ r_\infty &\mapsto [X_0, X_1] = [0, 1] \end{aligned}$$

In particolare, per i punti di r il legame tra coordinate omogenee e cordinata affine sulla retta è dato da

$$q_1 = X_1 / X_0.$$

Analogamente, un sistema di riferimento sulla retta affine s è dato da $Q'(0, q_2) \mapsto q_2$. Il corrispondente sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1]$ sul completamento proiettivo $\mathbb{P}(r)$ è dato da

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(s) &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ s \ni Q'(q_2) &\mapsto [1, X'_1/X'_0] = [1, q_2] \\ s_\infty &\mapsto [X'_0, X'_1] = [0, 1] \end{aligned}$$

Utilizzando le coordinate omogenee (per $Q' \neq A$), l'immagine di $Q[1, q_1] = Q[1, X_1/X_0]$, tramite la proiezione centrale definita in (5.40), è il punto $Q'[1, \frac{q_1 p_2}{q_1 - p_1}]$. Osservando che

$$[1, \frac{q_1 p_2}{q_1 - p_1}] = [q_1 - p_1, q_1 p_2] = [(X_1/X_0) - p_1, (X_1/X_0) p_2] = [X_1 - p_1 X_0, X_0 p_2],$$

la proiezione centrale è descritta dalla relazione $Q[X_0, X_1] \mapsto Q'[X'_0, X'_1]$ ove

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ 1 & -p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0$$

In particolare, In particolare, la proiezione centrale da P di r su s si estende ad una proiettività $\omega : \mathbb{P}(r) \to \mathbb{P}(s)$ nella quale $\omega(Q_0) = s_\infty$ e $\omega(r_\infty) = (0, p_2)$.

La retta per P parallela ad r è la retta $x_1 - p_1 = 0$ che corrisponde, ad esempio, a $(X_1, X_2) = (1, 0)$, mentre la retta per P parallela ad s è la retta $x_2 - p_2 = 0$ che corrisponde, ad esempio, a $(X_1, X_2) = (0, 1)$.

La retta per P parallela ad r è la retta $x_1 - p_1 = 0$ che corrisponde, ad esempio, a $(X_1, X_2) = (1, 0)$, mentre la retta per P parallela ad s è la retta $x_2 - p_2 = 0$ che corrisponde, ad esempio, a $(X_1, X_2) = (0, 1)$. Le rette del fascio sono quindi in biezione con l'insieme quoziente

Se $X_1 \neq 0$, cioè la retta r_{X_1,X_2} non è parallela ad r, risulta $r_{X_1,X_2} \cap r = \{Q(p_1 + (X_2/X_1)p_2, 0)\}$. Per $X_1 \neq 0$, il rapporto $t = (X_2/X_1)$ parametrizza i punti di r e a $t = 0$ corrisponde il punto $Q_0(p_1, 0)$.

Se $X_2 \neq 0$, cioè la retta r_{X_1,X_2} non è parallela ad s, risulta $r_{X_1,X_2} \cap s = \{(0, (X_1/X_2)p_1 + p_2)\}$. Per $X_2 \neq 0$, il rapporto $k = (X_1/X_2)$ parametrizza i punti di s e a $k = 0$ corrisponde il punto $(0, p_2)$.

Se $X_1 \neq 0$ e $X_2 \neq 0$, la retta r_{X_1,X_2} è una delle rette che intervengono nella definizione della proiezione centrale (5.40): l'immagine $\{Q(p_1 + (X_2/X_1)p_2, 0)\}$ tramite la proiezione centrale è il punto $Q'(0, (X_1/X_2)p_1 + p_2)$.

Problema 5.23. Proiezioni da un punto. *Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione n, siano fissati un iperpiano $\mathbf{H}$ ed un punto $A \notin \mathbf{H}$. Per ogni punto P in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, con $P \neq A$ si può considerare la retta proiettiva $r =< P, A >$. La retta r interseca $\mathbf{H}$ in un punto P' che viene detto la* proiezione del punto P da A su $\mathbf{H}$. *Il punto A è detto* centro della proiezione. *Risulta così individuata una applicazione:*

$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \setminus \{A\} \to \mathbf{H} \\ \qquad P \qquad \mapsto P' =< P, A > \cap \mathbf{H} \end{array}$$

detta proiezione di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di centro A su $\mathbf{H}$.

a) Verifica che φ è una applicazione (ma non una proiettività!) ben definita e suriettiva.
b) Mostra che esiste un sistema di coordinate in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ tale che $\mathbf{H}$ ha equazione $X_n = 0$ e la proiezione su $\mathbf{H}$ di centro A si scrive come

$$\begin{array}{rll} \varphi : & \mathbb{P}(\mathbf{V}) \setminus \{A\} & \to \mathbf{H} \\ & P = [p_0, \dots, p_n] & \mapsto [p_0, \dots, p_{n-1}, 0]. \end{array}$$

c) Se $\mathbf{H}'$ è un'altro iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ che non contiene A, la restrizione di φ a $\mathbf{H}'$ è una proiettività

$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathbf{H}' \to \mathbf{H} \\ \quad P \mapsto P' =< P, A > \cap \mathbf{H}. \end{array}$$

che lascia fisso ciascun punto in $\mathbf{H} \cap \mathbf{H}'$.

Soluzione. a) È sufficiente dimostrare b).
b) Fissati n punti $P_0, \dots, P_{n-1}$ in posizione generale in $\mathbf{H}$, sia $\mathcal{R}$ un riferimento di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in cui $P_0, \dots, P_{n-1}, A$ sono i punti fondamentali. In tale riferimento, $A[0, \dots, 0, 1]$ e $\mathbf{H}$ ha equazione $X_n = 0$. Se $P[p_0, \dots, p_n] \neq A$, i punti della retta $< P, A >$ hanno coordinate del tipo $[\lambda p_0, \dots, \lambda p_n + \mu]$ (con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$); dunque $< P, A > \cap \mathbf{H} = [p_0, \dots, p_{n-1}, 0]$. Nel riferimento $\mathcal{R}$, la proiezione su $\mathbf{H}$ di centro A è quindi ben definita e si scrive nella forma richiesta. In particolare, la proiezione è suriettiva.
c) Segue da b).

Problema 5.24. Proiezioni da un sottospazio. *E' possibile generalizzare l'esercizio precedente come segue.*
In $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ siano fissati due sottospazi $\mathbf{S}_r$ di dimensione r ed $\mathbf{S}_{n-r-1}$ di dimensione $n-r-1$ tra loro disgiunti, cioè tali che $\mathbf{S}_r \cap \mathbf{S}_{n-r-1} = \emptyset$. Risulta definita una applicazione:

$$\begin{array}{rl} \varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \setminus \{\mathbf{S}_{n-r-1}\} & \to \mathbf{S}_r \\ P & \mapsto P' =< P, \mathbf{S}_{n-r-1} > \cap \mathbf{S}_r \end{array}$$

detta proiezione di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di centro $\mathbf{S}_{n-r-1}$ su $\mathbf{S}_r$.
a) Posto $\mathbf{S}_r = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ e $\mathbf{S}_{n-r-1} = \mathbb{P}(\mathbf{Z})$ per opportuni sottospazi vettoriali $\mathbf{W}$ e $\mathbf{Z}$ di $\mathbf{V}$, mostra che $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{Z}$.
b) Verifica che l'intersezione $< P, \mathbf{S}_{n-r-1} > \cap \mathbf{S}_r$ contiene esattamente un punto.
c) Scrivi le formule di trasformazione di φ in un sistema di riferimento $\mathcal{R}$ in cui $\mathbf{S}_r$ abbia equazioni $X_{r+1} = X_{r+2} = \ldots = X_n = 0$ e $\mathbf{S}_{n-r-1}$ abbia equazioni $X_0 = X_1 = \ldots = X_r = 0$.
d) Verifica che φ è suriettiva su $\mathbf{S}_{n-r-1}$ e che ogni punto $P \in \mathbf{S}_r$ è fisso per φ, cioè:

$$P \in \mathbf{S}_r \quad \Rightarrow \quad \varphi(P) = P.$$

e) Verifica che se $P_1, P_2 \notin \mathbf{S}_{n-r-1}$:

$$< P_1, \mathbf{S}_{n-r-1} > = < P_2, \mathbf{S}_{n-r-1} > \quad \Rightarrow \quad \varphi(P_1) = \varphi(P_2).$$

Soluzione. Poichè $P \notin \mathbf{S}_{n-r-1}$, il sottospazio proiettivo $\mathbf{S} =< P, \mathbf{S}_{n-r-1} >$ ha dimensione $n-r$ ed interseca $\mathbf{S}_r$ esattamente in un punto P'.

GEOMETRIA AFFINE E PROIETTIVA

Problema 5.25. Proiezione su un sottospazio parallela ad un sottospazio complementare *Sia $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{T}$ una decomposizione in somma diretta di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $\mathbf{V}$.*
a) È ben definita l'applicazione lineare $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che associa al vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ il vettore $\mathbf{w} = p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{v})$ tale che $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathbf{T}$. L'applicazione $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}$ è detta proiezione su $\mathbf{W}$ parallela a $\mathbf{T}$ *(o 'lungo' $\mathbf{T}$) .*
b) Sia $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{T}'$ è un'altra decomposizione di $\mathbf{V}$ come somma diretta, la differenza $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}'} - p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ induce una applicazione lineare $q : \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{W}$, tale che $q \circ p = p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} - p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}$ (ove, con $p : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathbf{W}$ si indichi la proiezione canonica).
c) Esiste una biezione (non naturale) tra l'insieme dei sottospazi $\mathbf{T}'$ tali che $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{T}'$ e $Hom(\mathbf{V}/\mathbf{W}, \mathbf{W})$ (lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari $\mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{W}$).

Soluzione. a) Poiché la somma $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{T}$ è diretta, ogni vettore $\mathbf{v}$ si scrive in modo unico com $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{t}$ con $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$. Ponendo $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ si ottiene una applicazione lineare ben definita, che soddisfa le richieste.
b) Tenendo conto di entrambe le decomposizioni di $\mathbf{V}$ in somma diretta, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ possiamo determinare (in modo unico) $\mathbf{v}_T, \mathbf{v}_{T'} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$ e $\mathbf{t}' \in \mathbf{T}'$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{v}_T + \mathbf{t} = \mathbf{v}_{T'} + \mathbf{t}'$. Osserviamo che $\mathbf{v}_T = p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v}_{T'} = p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}'}(\mathbf{v})$. L'applicazione differenza $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}'} - p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ si annulla su ogni vettore di $\mathbf{W}$, e dunque individua in modo univoco l'applicazione cercata $q : \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{W}$, definita da $q([\mathbf{v}]) = \mathbf{v}_{T'} - \mathbf{v}_T$.

c) A partire dal sottospazio $\mathbf{T}$, il punto precedente mostra come associare a un sottospazio complementare $\mathbf{T}'$ di $\mathbf{V}$ una applicazione lineare $q \in Hom(\mathbf{V}/\mathbf{W}, \mathbf{W})$. Viceversa, a una applicazione $q \in Hom(\mathbf{V}/\mathbf{W}, \mathbf{W})$ è possibile associare un complementare $\mathbf{T}' \leq \mathbf{V}$ di $\mathbf{W}$ definito ponendo $\mathbf{T}' = \{\mathbf{t} + q(\mathbf{t}) \,|\, \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$. Osserviamo che $\mathbf{T}'$ è effettivamente un sottospazio vettoriale (perché non vuoto e chiuso per combinazioni lineari) e $\mathbf{V}$ è somma diretta $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{T}'$. Le due costruzioni sono l'una inversa dell'altra, esibendo la biezione cercata. Si osservi che tale biezione dipende dalla scelta di $\mathbf{T}$.

Problema 5.26. *Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ lo spazio proiettivo associato a uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ su un campo $\mathbb{K}$. Sia $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ un suo iperpiano. Dimostra che $\mathbb{A} = \mathbb{P}(\mathbf{V}) \setminus \mathbf{H}$ ha una naturale struttura di spazio affine, avente come giacitura $Hom(\mathbf{V}/\mathbf{W}, \mathbf{W})$.*

Soluzione. Sia $\mathbf{U} = Hom(\mathbf{V}/\mathbf{W}, \mathbf{W})$. Occorre definire una applicazione $\mathbb{A} \times \mathbf{U} \to \mathbb{A}$ che induca una struttura di spazio affine su $\mathbb{A}$. Siano $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{A}$ e $f : \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{W}$ un elemento di $\mathbf{U}$: occorre definire il punto traslato $P + f$. Denotiamo con $\mathbf{v} + \mathbf{W}$ la classe individuata dal vettore $\mathbf{v}$ nello spazio vettoriale quoziente $\mathbf{V}/\mathbf{W}$; poichè $P \in \mathbb{A}$ e dunque $\mathbf{v} \notin \mathbf{W}$, la classe $\mathbf{v} + \mathbf{W}$ è non nulla e forma una base di $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ (che ha dimensione 1). Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \times \mathbf{U} &\to \mathbb{A} \\ (P = [\mathbf{v}], f) &\mapsto P + f := [\mathbf{v} + f(\mathbf{v} + \mathbf{W})] \end{aligned}$$

L'applicazione è ben definita, perché l'immagine non dipende dal rappresentante scelto. Infatti, se $[\mathbf{v}] = [\mathbf{v}']$ allora $\mathbf{v}' = a\mathbf{v}$ per un opportuno scalare non nullo a; per la linearità di f, segue che $[\mathbf{v}' + f(\mathbf{v}' + \mathbf{W})] = [a\mathbf{v} + af(\mathbf{v} + \mathbf{W})] = [\mathbf{v} + f(\mathbf{v} + \mathbf{W})]$.

La struttura affine su $\mathbb{A}$ è definita da

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \times \mathbb{A} &\to \mathbf{U} \\ (P = [\mathbf{v}], Q = [\mathbf{z}]) &\mapsto \mathbf{PQ} : \ \mathbf{V}/\mathbf{W}, \to \mathbf{W} \\ &\qquad\qquad \mathbf{u} + \mathbf{W} \to \mathbf{u_z} - \mathbf{u_v} \end{aligned}$$

ove con $\mathbf{u_z}$ e $\mathbf{u_v}$ si indichino le immagini di $\mathbf{u}$ nelle proiezioni $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ parallelamente a $< \mathbf{z} >$ e a $< \mathbf{v} >$, rispettivamente. (c.f. Esercizio Svolto 5.25)

Problema 5.27. *Nel piano euclideo, sia fissato un riferimento di coordinate (x, y) e si consideri la retta r di equazione $3x + 5y - 3 = 0$.*
a) Descrivere il sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ sul completamento proiettivo $\mathbb{P}(r)$ di r associato al riferimento $\mathcal{R} = (Q, (\mathbf{v})$, ove $Q(-1, 1)$ e $\mathbf{v}(5, -3)$.
b) Descrivere il sistema di coordinate omogenee $[Y_0, Y_1]$ sul completamento proiettivo $\mathbb{P}(r)$ di r associato al riferimento di origine $S(1, 0)$ e vettore direttore $\mathbf{w}(-10, 6)$.
c) Descrivere la relazione tra le coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ e $[Y_0, Y_1]$ trovate nei punti precedenti.

Soluzione. a) Il riferimento $\mathcal{R}$ associa, ad un punto $P(x, y) \in r$ la coordinata t definita da $x = -1 + 5t$, $y = 1 - 3t$. In particolare, ricaviamo che $t = \frac{x+1}{5}$. Il sistema di coordinate omogenee cercato è dato dunque da

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}(r) &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ P(x, y) &\mapsto [1, \tfrac{x+1}{5}] = [5, x + 1] = [X_0, X_1] \\ r_\infty &\mapsto [0, 1]. \end{aligned}$$

di inversa

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} &\to \mathbb{P}(r) \\ [X_0, X_1] &\mapsto P(-1 + 5\tfrac{X_1}{X_0}, 1 - 3\tfrac{X_1}{X_0}) \text{ se } X_0 \neq 0 \qquad t = \frac{X_1}{X_0} \\ [0,1] &\mapsto r_\infty . \end{aligned}$$

b) Il nuovo riferimento associa, ad un punto $P(x, y) \in r$ la coordinata s definita da $x = 1 - 10s$, $y = 6s$. In particolare, ricaviamo che $s = \frac{y}{6} = \frac{1-x}{10}$. Il sistema di coordinate omogenee cercato è dato dunque da

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}(r) &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ P(x, y) &\mapsto [1, \tfrac{y}{6}] = [6, y] = [Y_0, Y_1] \\ r_\infty &\mapsto [0, 1]. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} &\to \mathbb{P}(r) \\ [Y_0, Y_1] &\mapsto P(1 - 10\tfrac{Y_1}{Y_0}, 6\tfrac{Y_1}{Y_0}) \text{ se } Y_0 \neq 0 \\ [1, 0] &\mapsto r_\infty . \end{aligned}$$

c) Il cambio di coordinate si ottiene componendo φ con ψ^{-1}, osservando che $\psi^{-1}([X_0, X_1]) = (-1 + 5\frac{X_1}{X_0}, 1 - 3\frac{X_1}{X_0}) = (\frac{-X_0 + 5X_1}{X_0}, \frac{X_0 - 3X_1}{X_0}) = \varphi^{-1}[Y_0, Y_1]$:

$$\varphi \circ \psi^{-1}([X_0, X_1]) = \varphi(\frac{-X_0 + 5X_1}{X_0}, \frac{X_0 - 3X_1}{X_0}) = [X_0, 6X_0 - 18X_1] = [Y_0, Y_1].$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \rho\, Y_0 = X_0 \\ \rho\, Y_1 = 6X_0 - 18X_1 \end{cases} \qquad \exists \rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$$

Esercizi

SOTTOSPAZI PROIETTIVI

5.1. Nel piano proiettivo numerico reale, determinare equazione omogenea ed equazioni parametriche della retta r passante per $A[1, 0, 1]$ e $B[3, 6, -3]$. Determinare inoltre l'equazione del fascio di rette per A.

5.2. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, considera la retta r di equazioni $X_0 + 3X_2 = 0, X_1 + X_2 + X_3 = 0$.
a) Determinare la mutua posizione di r e della retta s generata da $[1, 0, 1, 1]$ e $[3, -1, 0, 0]$.
b) Determina equazione cartesiana e parametrica del piano generato da r e dal punto $[1, 1, 1, 1]$.

5.3. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, determinare l'intersezione tra la retta di equazione parametrica

$$P = \lambda_0[0, 1, -1, 2] + \lambda_1[1, 2, 2, 1]$$

e la retta s di equazione parametrica $P = \mu_0[1, 3, 1, 3] + \mu_1[1, 1, 3, -1]$.

5.4. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, dire se esiste un piano contenente la retta s generata da $[2, 1, -1, 4]$, $[-1, 0, 3, 4]$.

5.5. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, determinare l'intersezione tra il piano di equazione omogenea $X_0+X_1+X_2 = 0$ e la retta s generata da $[2, 1, -1, 4]$, $[-1, 0, 3, 4]$ e la retta r di equazioni $X_0+X_3 = 0, X_1+X_2 = 0$.

PROIETTIVITÀ

5.6. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1, 0]) = [1, 0]$, $\varphi([0, 1]) = [3, 1]$, $\varphi([1, 1]) = [1, 1]$. E' vero che $\varphi([2, 5]) = [4, 3]$?

5.7. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1, 2]) = [2, 0]$, $\varphi([2, 2]) = [3, 1]$, $\varphi([-1, 2]) = [1, 1]$. E' vero che $\varphi([1, 5]) = [1, 7]$?

5.8. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1, -2]) = [2, 0]$, $\varphi([6, 2]) = [3, 2]$, $\varphi([-3, 4]) = [1, -1]$.

5.9. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1, 0]) = [1, 1, 0]$, $\varphi([0, 1]) = [3, 0, 1]$,$\varphi([1, 1]) = [5, 2, 1]$. Determinare inoltre un sistema normale di equazioni cartesiane dell'immagine.

5.10. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1, 3]) = [1, 1, 0]$, $\varphi([2, 1]) = [-2, -1, 1]$, $\varphi([1, 1]) = [-1, 0, 1]$. Determinare inoltre la stella di iperpiani di centro l'immagine di φ.

5.11. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi([1, 0, 0])= [1, -4, 3]$, $\varphi([0, 1, 1]) = [0, 1, 1]$, $\varphi([0, 1, -1]) = [0, 2, 0]$, $\varphi([2, 3, -1]) = [1, 0, 0]$. Determinare l'immagine tramite φ della retta r generata da $[1, 1, 3]$ e da $[2, 1, 0]$.

5.12. Si consideri $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^5)$ con il riferimento standard. Siano H_1 la retta generata da $[1, 0, 1, 3, 0]$, $[0, 1, 0, -2, 1]$ ed H_2 la retta generata da $[1, 1, 2, 3, -1]$, $[1, 0, 0, 1, 1]$ Determinare le stelle di iperpiani di centro (risp.) H_1, H_2, $H_1 \vee H_2$.

5.13. Determinare una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ la cui immagine abbia equazioni: $X_1 - X_2 = O$.

5.14. Esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che l'immagine della retta r di equazione $X_0 - 3X_2 = 0$ sia la retta r' di equazione $X_1' + X_2' = 0$ e l'immagine della retta s di equazione $X_1 + X_2 = 0$ sia la retta s' di equazione $X_0' - X_1' + X_2' = 0$?

PUNTI IN POSIZIONE GENERALE E SISTEMI DI COORDINATE

5.15. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, sono dati i punti di coordinate:

$$P_0[1,0,-2], \quad P_1[0,-1,-1], \quad P_2[2,0,1], \quad P_3[1,-2,5]$$

in un sistema di riferimento fissato. Mostrare che i punti P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale e determinare le formule di trasformazione dal sistema di riferimento originario al sistema che ha P_0, P_1, P_2, P_3 come punti fondamentali.

5.16. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, si considerino i punti di coordinate:

$$P_0[1,1,0], \quad P_1[0,1,1], \quad P_2[1,-1,0], \quad P_3[0,1,-1]$$

in un sistema di riferimento fissato. Mostrare che i punti P_0, P_1, P_2, P_3 sono punti fondamentali e punto unità in un riferimento proiettivo $\mathcal{R}$. Determinare le coordinate dei punti $Q_0[1,2,1]$ e $Q_1[1,7,0]$ in $\mathcal{R}$.

5.17. In $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sia fissato un riferimento $\mathcal{R}$. Descrivere in coordinate la proiezione di centro $A = [0,1,0]$ della retta r' di equazione $X_0 + X_1 = 0$ sulla retta r di equazione $X_2 1 + 2X_2 = 0$.

5.18. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4_{\mathbf{C}}$, dire quali tra i seguenti insiemi di punti sono indipendenti, quali sono in posizione generale e quali formano un sistema di riferimento:
a) $P_0 = [2,1,0,2,0]$, $P_1 = [1,1,1,1,1]$;
b) $P_0 = [2,1,0,2,1]$, $P_1 = [1,1,1,1,0]$, $P_2 = [4,0,2,-3,1]$;
c) $P_0 = [2,1,0,2,0]$, $P_1 = [1,1,1,1,1]$, $P_2 = [5,3,1,5,1]$, $P_3 = [0,1,0,0,0]$;
d) $P_0 = [1,3,0,8,0]$, $P_1 = [1,1,0,1,1]$, $P_2 = [0,0,1,0,1]$;
e) $S_0 = [1,1,1,0,8]$, $S_1 = [0,1,1,1,1]$, $S_2 = [0,1,0,3,1]$, $S_3 = [0,1,0,0,0]$, $S_4 = [0,3,0,0,2]$;
f) S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, $S_6 = [1,0,0,0,0]$.

5.19. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ si considerino i sottospazi generati rispettivamente dai punti:
a) $P_0 = [2,3,0,8]$, $P_1 = [1,1,1,1]$;
b) $P_0 = [2,3,0,8]$, $P_1 = [1,1,1,1]$, $P_2 = [4,5,2,10]$;
c) $P_0 = [2,3,0,8]$, $P_1 = [1,1,1,1]$, $P_2 = [0,1,0,1]$;
d) $P_0 = [2,3,0,8]$, $P_1 = [1,1,1,1]$, $P_2 = [0,1,0,1]$, $P_3 = [1,0,0,0]$;
e) P_0, $P_1 = [1,1,1,1]$, $P_2 = [0,1,0,1]$, $P_3 = [1,0,0,0]$, $P_4 = [2,0,0,1]$.
Per ciascuno di tali sottospazi, determinare dimensione, equazioni parametriche ed un sistema normale di equazioni omogenee.

5.20. a) Dimostrare che esiste una proiettività $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ tale che:

$$\psi([1,2]) = [1,0,1,0],\ \psi([3,4]) = [1,2,0,1],$$
$$\psi([3,1]) = [2,2,1,1],\ \psi([0,1]) = [8,6,5,3].$$

b) Determinare un sistema normale di equazioni dell'immagine di ψ.

5.21. Esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ tale che l'immagine del piano π di equazione $X_0 - 3X_2 = 0$ sia il piano π' di equazione $X'_1 + 4X'_2 = 0$ e l'immagine della retta s di equazioni $X_0 + X_3 = 0, X_1 + X_2 = 0$ sia la retta s' di equazioni $X'_0 - X'_1 = 0, X'_3 + X'_2 = 0$? In caso positivo, determinare una tale proiettività e discuterne l'unicità.

5.22. Sia φ una proiettività dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ in sè, tale che l'insieme dei suoi punti fissi (cioè i punti $P \in \mathbb{P}^3$ con $\varphi(P) = P$) sia formato da due rette disgiunte r ed s. Mostrare che, per ogni Q in $\mathbb{P}^3$, la coppia di punti Q, $\varphi(Q)$ appartiene ad una retta che interseca propriamente sia r che s.

5.23. a) Dimostrare che esiste una proiettività $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che:

$$\psi([1,2]) = [1,0,1,0],\ \psi([3,4]) = [1,2,0,1],$$
$$\psi([3,1]) = [2,2,1,1],\ \psi([0,1]) = [8,6,5,3].$$

b) Determinare un sistema normale di equazioni dell'immagine di ψ.

GEOMETRIA AFFINE E PROIETTIVA

5.24. Determinare le equazioni (nel riferimento usuale) della proiettività indotta tra i completamenti proiettivi dall'affinità $\varphi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di equazioni $x' = 2x+y, y' = x-y$.

5.25. Nel completamento proiettivo dello spazio affine numerico di dimensione 3, determinare l'equazione cartesiana del completamento del piano affine $x + 3y = 3$ ed una equazione parametrica del completamento della retta affine di equazioni $x + 2z = 1, y + z = 2$.

5.26. Nel piano euclideo reale, sia fissato un sistema di coordinate (x, y). Determinare un sistema di coordinate omogenee sul completamento proiettivo della retta $x = 0$.

5.27. Nel piano euclideo reale, sia fissato un sistema di coordinate (x, y). Sia r la retta di equazione $3x - 2y = 0$.
a) Determinare il sistema di coordinate omogenene $[X_0, X_1]$ associato al riferimento di r dato da $(O, \mathbf{v} = (2, 3))$.
b) Determinare il sistema di coordinate omogenene $[X'_0, X'_1]$ associato al riferimento di r dato da $(A(4, 6), \mathbf{w} = (-12, -18))$.
c) Determinare il cambio di coordinate omogenee che lega le coordinate $[X_0, X_1]$ e $[X'_0, X'_1]$ definite ai punti precedenti.

5.28. Nel piano affine, sia assegnato un sistema di riferimento cartesiano, con coordinate (x, y). Si assegni, nel completamento del piano, il sistema di coordinate omogenee associato $[X_0, X_1, X_2]$.
a) Determina le coordinate omogenee di $P(3, 2)$.
b) Determina l'equazione omogenea del completamento proiettivo $\mathbb{P}(s)$ della retta affine s di equazione $5x - 7y + 12 = 0$ e calcolane il punto improprio.
c) Determina l'equazione omogenea della retta passante per P e avente lo stesso punto improprio di $\mathbb{P}(s)$ (notazioni dei punti precedenti).
d) Determinare l'equazione affine della retta il cui completamento proiettivo ha equazione $2X_1 - X_2 + 4X_0 = 0$.

Complementi

Più che complementi, i paragrafi successivi sono lo studio diretto degli spazi proiettivi in dimensione bassa, che può essere affrontato anche indipendentemente dal capitolo precedente.

5.7 La retta proiettiva

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Su $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ è definita la *relazione di proporzionalità* $\mathcal{P}$:

$$(X_0, X_1)\mathcal{P}(Y_0, Y_1) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{esiste } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ tale che } (X_0, X_1) = \lambda(Y_0, Y_1), \\ \text{cioè } X_0 = \lambda Y_0 \text{ e } X_1 = \lambda Y_1 \end{array}$$

che è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathbb{K}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathcal{P}$ si denota anche col simbolo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$4cm]$\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ o più semplicemente $\mathbb{P}^1$ e si dice *retta proiettiva numerica* (o, più semplicemente, *retta proiettiva*) e i suoi elementi sono detti *punti* della retta proiettiva. La classe di equivalenza di una coppia ordinata non nulla (X_0, X_1) si denota con il simbolo:

$$[X_0, X_1] = \{(\lambda X_0, \lambda X_1) | \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\};$$

si dice che la coppia (X_0, X_1) (e ogni coppia ad essa equivalente) costituisce la coppia delle *coordinate omogenee* del punto $[X_0, X_1]$. *Le coordinate omogenee di un punto formano dunque una coppia ordinata mai nulla, che è determinata dal punto della reta proiettiva solo a meno di multiplo per un fattore costante non nullo.*

Esempio 5.7.1. $[3, 2] = [15, 10] = [-3, -2] = [3/7, 2/7] = [3\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$; $[24, 7] \neq [2, 5]$.

Osservazione 5.7.2. Due punti $[X_0, X_1]$ e $[Y_0, Y_1]$ della retta proiettiva numerica coincidono se e solo se $\det \begin{pmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{pmatrix} = 0$.

Esempio 5.7.3. **Coordinate omogenee e completamento proiettivo di una retta** In una retta r sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = \{O, (\mathbf{v})\}$; sia $\mathbb{P}(r)$ il completamento proiettivo definito nell'esempio 5.1.1. Ad ogni punto proprio Q corrisponde una coordinata q. Possiamo dunque definire l'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r) = r \cup \{r_\infty\} &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ r \ni Q(q) &\mapsto [1, q] \\ r_\infty &\mapsto [0, 1] \end{aligned} \tag{5.41}$$

Osserviamo che $[1, q] = [X_0, X_1]$ se e solo se $X_0 \neq 0$ e $q = X_1/X_0$, mentre $[0, 1] = [0, \lambda]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. L'applicazione definita in (5.41) è una biezione e diciamo che essa (o, più precisamente, la sua inversa) assegna un *sistema di coordinate omogenee* $[X_0, X_1]$ sulla retta proiettiva. Per indicare che al punto Q sono associate le coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ scriviamo

$$Q[X_0, X_1].$$

Per distinguere, chiamiamo "affine" la coordinata usuale.

Osserviamo che, se Q ha coordinata affine q, le corrispondenti coordinate omogenee sono $[1, q]$: se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $q \neq 0$, si ha che $[1, q] = [1/q, 1]$. Se t è un parametro reale,

$$\lim_{q \to \pm\infty} (1/q, 1) = (0, 1),$$

che sono coordinate omogenee di r_∞. Un ragionamento analogo permette di studiare il completamento proiettivo di una retta complessa.

Il dato di un riferimento su r definisce quindi un sistema di coordinate omogenee nel completamento proiettivo $\mathbb{P}(r)$: in particolare, tale corrispondenza assegna un ruolo speciale al punto $[0, 1]$, che viene caratterizzato come punto improprio in questa corrispondenza, ma è un punto come tutti gli altri in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Si osservi che l'applicazione definita in (5.41) dipende dalla scelta del riferimento in r: l'immagine dell'origine O (cioè le sue coordinate omogenee) è $[1, 0]$, mentre l'immagine del punto $U = O + \mathbf{v}$ è $[1, 1]$ (detto *punto unità*). In un altro riferimento, si avrà $Q(aq + b) \mapsto [1, aq + b]$, corrispondente a $P \mapsto [X'_0, X'_1] = [X_0, aX_0 + bX_1]$. La relazione tra le coordinate omogenee indotte dai due riferimenti di r è dunque data da:

$$\begin{cases} \rho X'_0 = X_0 \\ \rho X'_1 = aX_0 + bX_1 \end{cases} \qquad \rho \neq 0.$$

In particolare, *qualunque sia il riferimento cartesiano scelto su r, il punto improprio di r viene associato al punto* $[0, 1]$ *di* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$.

La nozione di cambio di riferimento in una retta proiettiva è più generale dei cambi indotti dai cambi affini e non assegna ruolo speciale a nessun punto:

Definizione 5.7.4. Un *cambiamento di sistema di coordinate omogenee* in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ (o, più in generale, su una retta proiettiva) è una trasformazione della forma $[X_0, X_1] \mapsto [X'_0, X'_1]$ ove

$$\begin{cases} \rho X'_0 = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 \\ \rho X'_1 = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 \end{cases} \qquad \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.42}$$

Osservazione 5.7.5. Il cambio di coordinate individua la matrice $M = (m_{ij})_{ij}$ solo a meno di una costante non nulla. Un cambio di coordinate viene chiamato anche *cambio di riferimento (proiettivo)*.

Osservazione 5.7.6. Osserviamo che tali cambiamenti non provengono in generale dai cambiamenti di riferimento cartesiani: infatti, il cambiamento descritto in (5.42) trasforma $[0, 1]$ in $[m_{01}, m_{11}]$; si osservi che $[0, 1] = [m_{01}, m_{11}]$ se e solo se $m_{01} = 0$. Considerando dunque la nozione più generale di cambio di coordinate, non si hanno punti dal ruolo speciale in modo intrinseco: è solo la scelta del sistema di coordinate che assegna uno speciale ruolo ad alcuni punti.

Il termine "riferimento" che entra nel nome del seguente teorema verrà giustificato nella definizione 5.7.9:

Teorema 5.7.7. Teorema fondamentale dei riferimenti *Fissati tre punti distinti A,B, C su una retta proiettiva, esiste uno ed un solo sistema di coordinate omogenee sulla retta tale che*

$$A[1, 0], B[0, 1], C[1, 1].$$

Dimostrazione. Fisso un sistema di coordinate omogenee qualunque $[X_0, X_1]$ sulla retta. In tale sistema si avrà:

$$A[a_0, a_1], B[b_0, b_1], C[c_0, c_1]$$

Se il sistema di coordinate proiettive cercato esiste, si otterrà con un cambio di coordinate della forma

$$\begin{cases} \rho X_0' = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 \\ \rho X_1' = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 \end{cases} \qquad \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.43}$$

È conveniente considerare il cambio di coordinate inverso, che avrà la forma

$$\begin{cases} \rho X_0 = n_{00}X_0' + n_{01}X_1' \\ \rho X_1 = n_{10}X_0' + n_{11}X_1' \end{cases} \qquad \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.44}$$

Il cambio di coordinate inverso (se il sistema di coordinate proiettive cercato esiste) deve trasformare $[1, 0]$ in $[a_0, a_1]$: dunque la prima colonna della matrice del cambio inverso deve essere un multiplo delle coordinate di A:

$$\begin{cases} n_{00} = \lambda a_0 \\ n_{10} = \lambda a_1 \end{cases} \exists \lambda \neq 0$$

Imponendo anche che l'immagine di $[0, 1]$ sia multiplo delle coordinate omogenee di B, si ricava che la matrice del cambio inverso è della forma

$$\begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \mu b_0 \\ \lambda a_1 & \mu b_1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \neq 0$$

Imponiamo ora che l'immagine di $[1, 1]$ sia un multiplo delle coordinate omogenee di C nel sistema originario troviamo la relazione

$$\begin{cases} \lambda a_0 + \mu b_0 = \rho c_0 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 = \rho c_1 \end{cases} \tag{5.45}$$

tra le costanti non nulle ρ, λ, μ. Tale relazione si traduce in un sistema omogeneo nelle indeterminate ρ, λ, μ:

$$\begin{cases} \lambda a_0 + \mu b_0 - \rho c_0 = 0 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 - \rho c_1 = 0 \end{cases}. \tag{5.46}$$

Il sistema di coordinate cercato esiste se e solo il sistema (5.46) ammette una soluzione $(\lambda_0, \mu_0, \rho_0,)$ con $\lambda_0 \neq 0$, $\mu_0 \neq 0$, $\rho_0 \neq 0$. La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & -c_0 \\ a_1 & b_1 & -c_1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 e dunque le soluzioni dipendono da un parametro libero. Tutte le soluzioni si ottengono dunque come multipli scalari della soluzione

$$(\lambda_0, \mu_0, \rho_0) = (det \begin{pmatrix} b_0 & -c_0 \\ b_1 & -c_1 \end{pmatrix}, -det \begin{pmatrix} a_0 & -c_0 \\ a_1 & -c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}) \tag{5.47}$$

che ha tutte e tre le componenti non nulle, perchè i tre punti A, B, C sono distinti. Allora

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 a_1 & \mu_0 b_1 \\ \lambda_0 a_2 & \mu_0 b_2 \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

è la matrice che definisce il cambiamento inverso. Abbiamo dunque mostrato che il sistema di coordinate omogenee cercato esiste: inoltre esso è unico, perché ogni altra soluzione del sistema (5.46) è multipla di $(\lambda_0, \mu_0, \rho_0)$ per una costante non nulla, e produce una matrice che è multipla di (5.48) per una costante non nulla. □

Definizione 5.7.8. Se in un sistema di coordinate omogenee su una retta proiettiva, tre punti A, B, C hanno coordinate $A[1,0]$, $B[0,1]$, $C[1,1]$, diciamo che A è il *punto improprio* o *punto all'infinito* del sistema di coordinate, il punto B è detto *origine* mentre C è detto *punto unità* del sistema di coordinate. I punti A, B, C vengono detti *punti fondamentali* del sistema di coordinate omogenee.

Definizione 5.7.9. Una terna ordinata (A, B, C) di punti distinti di una retta proiettiva è un *riferimento proiettivo*, associando a tale terna il sistema di coordinate omogenee nel quale i punti sono, rispettivamente, il punto improprio, l'origine e il punto unità.

Esempio 5.7.10. Supponiamo che in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ siano assegnati i punti $A[2,3]$, $B[4,-1]$, $C[1,-5]$ e cerchiamo il sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1]$ tale che nel nuovo sistema le coordinate omogenee di A, B e C siano, rispettivamente, $[1,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$. Il cambiamento inverso è della forma

$$\begin{pmatrix} 2\lambda & 4\mu \\ 3\lambda & -\mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \neq 0$$

e devono essere soddifatte le relazioni

$$\begin{cases} 2\lambda + 4\mu = -\rho \\ 3\lambda - \mu = 5\rho \end{cases} \tag{5.49}$$

In base alla teoria generale dei sistemi lineari, sicuramente una soluzione si può trovare prendendo i minori con segni alterni della matrice dei coefficienti, come nell'equazione (5.47):

$$\lambda = det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = -19, \mu = -det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 13, \rho = det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -14.$$

Si ricava che una matrice per il cambio inverso è:

$$\begin{pmatrix} -38 & 52 \\ -57 & -13 \end{pmatrix}$$

e dunque il cambio di riferimento cercato è dato da:

$$\begin{cases} \kappa X'_0 = -13X_0 - 52X_1 \\ \kappa X'_1 = 57X_0 - 38X_1 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \tag{5.50}$$

Osservazione 5.7.11. **Rette proiettive e rette affini** Fissati tre punti distinti A, B, C in una retta proiettiva r, risulta fissato il sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ nel quale A, B, C sono i punti fondamentali. Questo dato permette di identificare $r \setminus \{A\}$ con una retta affine nel quale risulta fissato un sistema di riferimento di coordinata x, e in modo tale che r risulti il completamento proiettivo della retta affine. Basta infatti considerare la biezione:

$$\begin{aligned} r \setminus \{A\} &\to \mathbb{K} \\ Q[X_0, X_1] &\mapsto x = X_1/X_0 \end{aligned} \tag{5.51}$$

primo punto è detto Come nel capitolo precedente, la legge di un cambio di riferimento può essere interpretata anche come trasformazione tra due rette proiettive. Nel seguito denotiamo con r e r' due rette proiettive.

Definizione 5.7.12. Proiettività Su due rette proiettive r e r' siano assegnati sistemi di coordinate proiettive $[X_0, X_1]$ e $[X_0', X_1']$ rispettivamente. Una *proiettività* tra le due rette proiettive r e r' è una trasformazione $\omega : r \to r'$, $\omega([X_0, X_1]) = [X_0', X_1']$, ove

$$\begin{cases} \rho X_0' = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 \\ \rho X_1' = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 \end{cases} \qquad \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.52}$$

Osservazione 5.7.13. Analogamente all'osservazione 5.9.2, la proiettività individua la matrice $M = (m_{ij})_{ij}$ solo a meno di una costante non nulla. La richiesta che M abbia determinante non nullo è necessaria, altrimenti esisterebbe almeno un punto la cui immagine non sarebbe definita.

Osservazione 5.7.14. Ogni proiettività tra due rette proiettive è una applicazione biunivoca. La composizione di proiettività tra rette proiettive è ancora una proiettività. In particolare, le proiettività di una retta in sè formano un gruppo, detto *gruppo proiettivo della retta*.

Il teorema 5.7.7 ha come diretta conseguenza il seguente:

Teorema 5.7.15. Teorema fondamentale delle proiettività per la retta proiettiva *Siano r ed r' due rette proiettive e siano fissati tre punti distinti A, B, C di r e tre punti distinti A', B', C' di r'. Esiste una ed una sola proiettività $\omega : r \to r'$ tale che $\omega(A) = (A')$, $\omega(B) = (B')$, $\omega(C) = (C')$.*

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale dei riferimenti 5.7.7 è possibile scegliere un sistema di coordinate proiettive $[X_0, X_1]$ su r ed un sistema $[X_0', X_1']$ in r' tali che $A[1, 0]$, $B[0, 1]$, $C[1, 1]$ e $A'[1, 0]$, $B'[0, 1]$, $C'[1, 1]$. La proiettività

$$\begin{cases} \rho X_0' = X_0 \\ \rho X_1' = X_1 \end{cases}$$

soddisfa le richieste ed è l'unica con tale proprietà. □

Esempio 5.7.16. Riprendiamo le notazioni dell'esempio 5.7.10. Siano inoltre assegnati tre punti distinti $A'[2, 1]$, $B'[-3, 1]$, $C'[1, 2]$ in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ e cerchiamo di determinare la legge della proiettività $\omega \colon \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ tale che $\omega(A) = (A')$, $\omega(B) = B'$, $\omega(C) = C'$. Osserviamo che, nello svolgimento dell'esempio 5.7.10 abbiamo determinato la legge di una proiettività $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tale che $\varphi(A) = [1,0]$, Infatti, basta considerare le equazioni (5.50) e definire $\varphi[X_0, X_1] = [-13X_0 - 52X_1, 57X_0 - 38X_1]$. Chiamiamo per semplicità $[Y_0, Y_1]$ le coordinate di $\varphi[X_0, X_1]$. Determiniamo ora $\psi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, $\psi[Y_0, Y_1] = [X'_0, X'_1]$ tale che $\psi[1,0] = A'$, $\psi[0,1] = B'$, $\psi[1,1] = C'$. La composizione $\omega = \psi \circ \psi$ fornirà la proiettività cercata. Risulta che ψ è descritta da

$$\begin{cases} \kappa X'_0 = 14Y_0 - 9Y_1 \\ \kappa X'_1 = 7Y_0 + 3Y_1 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

La composizione è dunque definita da:

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -9 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -13 & -52 \\ 57 & -38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \tag{5.53}$$

Il teorema fondamentale delle proiettività assicura che una proiettività tra rette è univocamente individuata quando si fissa l'immagine di un riferimento del dominio. Come conseguenza, se si fissa arbitrariamente l'immagine di 4 punti distinti, non necessariamente esiste una proiettività che soddisfi le richieste. Questa osservazione motiva la seguente:

Definizione 5.7.17. Sia A, B, C, D (risp., A', B', C', D') una quaterna ordinata di punti distinti di una retta proiettiva r (risp., r'). Le due quaterne di punti si dicono *quaterne proiettive* se esiste una proiettività $\omega : r \to r'$ tale che:

$$\omega(A) = A', \omega(B) = B', \omega(C) = C', \omega(D) = D'.$$

Lo strumento privilegiato per caratterizzare le quaterne proiettive è il birapporto:

Definizione 5.7.18. Sia r una retta proiettiva e ne siano A, B, C punti distinti, sicché esiste un unico riferimento φ tale che A, B ed C abbiano coordinate omogenee $[1,0], [0,1]$ e $[1,1]$ in φ. Se D è un punto di r, le coordinate omogenee di D in φ si dicono *birapporto della quaterna* (A, B, C, D) e si denotano col simbolo

$$(A\,B\,C\,D).$$

Osservazione 5.7.19. Supponiamo che r sia $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ e che A, B, C ed D abbiano coordinate omogenee $[a_0, a_1]$, $[b_0, b_1]$, $[c_0, c_1]$ e $[d_0, d_1]$ rispettivamente. Calcoliamo il birapporto $(A\,B\,C\,D)$. Consideriamo a tale scopo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \quad &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ [X_0, X_1] &\mapsto [(c_0a_1 - c_1a_0)(X_0b_1 - X_1b_0), (c_0b_1 - c_1b_0)(X_0a_1 - X_1a_0)]. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Si verifica facilmente che ψ è una proiettività e che

$$\psi([a_0, a_1]) = [1,0], \psi([b_0, b_1]) = [0,1], \psi([c_0, c_1]) = [1,1] \tag{5.55}$$

sicché ψ^{-1} è proprio il riferimento φ in cui $[a_0, a_1]$, $[b_0, b_1]$, $[c_0, c_1]$ hanno rispettivamente coordinate omogenee $[1,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$. Quindi

$$\begin{aligned} (A\,B\,C\,D) = \psi([d_0, d_1]) = & \\ = [(c_0a_1 - c_1a_0)(d_0b_1 - d_1b_0), (c_0b_1 - c_1b_0)(d_0a_1 - d_1a_0)] = & \\ = [det \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{pmatrix}]. & \end{aligned} \tag{5.56}$$

Ad esempio, se in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ si considerano i punti $A[2,3]$, $B[4,-1]$, $C[-1,5]$ come nell'esempio 5.7.10, e il punto $D[1,3]$, il birapporto $(A\,B\,C\,D)$ è dato da:

$$\begin{aligned}(A\,B\,C\,D) &= [det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\ det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\ det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}] \\ &= [13^2, 19\cdot 3] = [169, 57].\end{aligned}$$

Controlliamo il risultato sostituendo le coordinate di $D[1,3]$ nelle equazioni (5.50) del cambio di riferimento per ricavare il sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1]$ nel quale A, B, C siano i punti fondamentali:

$$\begin{cases} -169 = -13 - 52\cdot 3 \\ -57 = 57 - 38\cdot 3 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{K}\setminus\{0\} \tag{5.57}$$

Poiché $[-169, -57] = [169, 57]$ abbiamo trovato lo stesso risultato.

L'osservazione 5.7.19 permette facilmente di ricavare il seguente risultato:

Lemma 5.7.20. *Siano A, B, C, D quattro punti distinti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ (o di una retta proiettiva). Allora:*

$$(A\,B\,C\,D) = (A\,B\,D\,C) = (C\,D\,A\,B) = (D\,C\,B\,A).$$

Inoltre, posto $(A\,B\,C\,D) = [\lambda, \mu]$ si ha $(B\,A\,C\,D) = [\mu, \lambda]$: se la terna dei punti fondamentali è (A, B, C), la coordinata affine in $r\setminus\{A\}$ definita in (5.51) è $x = \lambda/\mu$. Se invece la terna è (B, A, C), la corrispondente coordinata affine in $r \setminus \{B\}$ è l'inverso $1/x = \mu/\lambda$.

Il seguente teorema mette in evidenza una importante proprietà del birapporto:

Teorema 5.7.21. *Siano r e r' due rette proiettive e siano A, B, C, D e A', B', C', D' due quaterne di punti di r e r' rispettivamente. Esiste una proiettività $\varphi : r \to r'$ tale che $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$, $\varphi(D) = D'$ (o, come si dice, le due quaterne A, B, C, D e A', B', C', D' sono* proiettive *o* proiettivamente equivalenti*) se e solo se si ha l'uguaglianza dei birapporti*

$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D').$$

Dimostrazione. Sia $\varphi : r \to r'$ una proiettività tale che $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$, $\varphi(D) = D'$. Sia, analogamente, $\psi' : r' \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tale che $\psi'(A') = [1,0]$, $\psi'(B') = [0,1]$, $\psi'(C') = [1,1]$. Per definizione di birapporto, risulta

$$(A'\,B'\,C'\,D') = \psi'(D').$$

D'altra parte, la composizione $\psi = \psi' \circ \varphi : r \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ è una proiettività tale che $\psi(A) = \psi'(A') = [1,0]$, $\psi(B) = \psi'(B') = [0,1]$, $\psi(C) = \psi'(C') = [1,1]$. Quindi $(A\,B\,C\,D) = \psi(D) = \psi'(D') = (A'\,B'\,C'\,D')$.

Viceversa, sia $(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D')$. Sia $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to r$ il riferimento in cui A, B ed C hanno rispettivamente coordinate omogenee $[1,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$. Similmente sia $\psi' : \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to r'$ il riferimento in cui A', B' ed C' hanno rispettivamente coordinate omogenee $[1,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$. L'ipotesi $(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D')$ comporta che D e D' hanno in ψ e ψ' rispettivamente le stesse coordinate omogenee $[d_0, d_1]$. Sia allora

$\varphi : r \to r'$ la proiettività la cui matrice nei riferimenti ψ e ψ' è la matrice identica. Tale proiettività manda un punto di r avente coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ in ψ nel punto di r' di coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ in ψ'. Ma allora φ manda ordinatamente A, B, C e D in A', B', C' e D', perché questi punti hanno in ψ e ψ' le stesse coordinate $[1, 0], [0, 1], [1, 1]$ e $[d_0, d_1]$. □

5.8 Il piano proiettivo

Su $\mathbb{K}^3 = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ è definita la *relazione di proporzionalità* $\mathcal{P}$:

$$(X_0, X_1, X_2)\mathcal{P}(Y_0, Y_1, Y_2) \Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ tale che } (X_0, X_1, X_2) = \rho(Y_0, Y_1, Y_2), \quad \text{cioè } X_0 = \rho Y_0 \text{ e } X_1 = \rho Y_1 \text{ e } X_2 = \rho Y_2$$

che è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathbb{K}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathcal{P}$ si denota anche col simbolo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ o più semplicemente $\mathbb{P}^2$ e si dice *piano proiettivo numerico* (o, più semplicemente, *piano proiettivo*) e i suoi elementi sono detti *punti* del piano proiettivo. La classe di equivalenza di una coppia ordinata non nulla (X_0, X_1, X_2) si denota con il simbolo:

$$[X_0, X_1, X_2] = \{(\rho X_0, \rho X_1, \rho X_2) | \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\};$$

si dice che la terna (X_0, X_1, X_2) (e ogni terna ad essa equivalente) costituisce le *coordinate omogenee* del punto $[X_0, X_1, X_2]$. Le coordinate omogenee di un punto formano dunque una terna ordinata mai nulla, che è determinata solo a meno di multiplo per un fattore costante non nullo.

Definizione 5.8.1. Un *cambiamento di sistema di coordinate omogenee* in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ (o, più in generale, su una piano proiettivo) è una trasformazione della forma $[X_0, X_1, X_2] \mapsto [X'_0, X'_1, X'_2]$ ove

$$\begin{cases} \rho X'_0 = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 + m_{02}X_2 \\ \rho X'_1 = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 + m_{12}X_2 \\ \rho X'_2 = m_{21}X_0 + m_{21}X_1 + m_{22}X_2 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, det \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \neq 0;$$

in forma matriciale la relazione si scrive come:

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0,$$

La descrizione dei sottospazi del piano proiettivo è più articolata rispetto a quella della retta.

Definizione 5.8.2. Una *retta (proiettiva)* del piano proiettivo è l'insieme dei punti le cui coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$ soddisfano una equazione lineare omogenea della forma:

$$aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0). \tag{5.58}$$

L'equazione è individuata dalla retta solo a meno di multiplo per una costante non nulla ed è detta *equazione omogenea della retta*.

La definizione di retta è invariante per cambi di coordinate omogenee. Bisogna ricordare che la soluzione $(0,0,0)$ non corrisponde a nessun punto del piano proiettivo.

Per denotare una retta proiettiva, useremo spesso i simboli r e s utilizzati anche per le rette affini.

Osservazione 5.8.3. **Equazioni parametriche di una retta** Consideriamo l'equazione omogenea di una retta proiettiva r

$$aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \qquad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

L'insieme delle soluzioni forma un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di K^3: siano $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2)$ e $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2)$ una base di tale sottospazio. I punti $P[p_0, p_1, p_2]$ e $Q[q_0, q_1, q_2]$ sono punti distinti di r e ogni altro punto ha coordinate omogenee della forma

$$[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}] \text{ con } (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

I punti della retta sono dunque della forma

$$\begin{cases} \rho X_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ \rho X_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \rho X_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, (\lambda, \mu) \neq (0,0). \tag{5.59}$$

Definizione 5.8.4. Equazioni della forma (5.59) sono dette *equazioni parametriche della retta proiettiva.*

Osservazione 5.8.5. Nelle notazioni precedenti, l'applicazione

$$\begin{aligned} r &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ [\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}] &\mapsto [\lambda, \mu] \end{aligned} \tag{5.60}$$

fornisce un sistema di coordinate omogenee su r, identificando la retta proiettiva r con una retta proiettiva numerica.

L'equazione parametrica dipende di una retta r non è unica, ma dipende dalla scelta dei due punti distinti P, $Q \in r$.

Osservazione 5.8.6. **Condizioni di allineamento di tre punti** Siano fissati due punti distinti $P[p_0, p_1, p_2]$ e $Q[q_0, q_1, q_2]$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. L'insieme dei punti di coordinate omogenee $[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}]$ forma una retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ (di equazioni parametriche (5.59)). *Per due punti distinti $P[p_0, p_1, p_2]$ e $Q[q_0, q_1, q_2]$ passa una ed una sola retta, la cui equazione omogenea è data da*

$$det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} X_0 - det \begin{pmatrix} p_0 & p_2 \\ q_0 & q_2 \end{pmatrix} X_1 + det \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} X_2 = 0.$$

In particolare, tre punti $T[t_0, t_1, t_2]$, $P[p_0, p_1, p_2]$, $Q[q_0, q_1, q_2]$ sono allineati se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} \leq 2$$

Osservazione 5.8.7. **Intersezione di due rette del piano** *Due rette distinte r e s di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ si intersecano sempre in uno ed un solo punto.* Infatti, siano $aX_0+bX_1+cX_2=0$ e $a'X_0+b'X_1+c'X_2=0$ le equazioni omogenee delle due rette; i punti dell'intersezione hanno coordinate che soddisfano il sistema omogeneo

$$\begin{cases} aX_0+bX_1+cX_2=0 \\ a'X_0+b'X_1+c'X_2=0 \end{cases},$$

la cui matrice dei coefficienti ha rango 2; per il teorema di Rouché-Capelli, le soluzioni del sistema formano uno spazio vettoriale di dimensione 1. La soluzione nulla non corrisponde ad un punto del piano proiettivo, mentre tutte le altre corrispondono ad uno stesso punto del piano proiettivo.

Osserviamo che le coordinate omogenee del punto di intersezione si ricavano facilmente dai coefficienti delle equazioni delle rette, utilizzando la teoria dei sistemi lineari:

$$X_0 = det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}; \quad X_1 = -det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}; \quad X_2 = det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

o risolvendo in modo diretto il sistema.

Esempio 5.8.8. **Completamento proiettivo di un piano affine** Sia assegnato un piano π nello spazio euclideo (o in quello complesso se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Per ogni retta $r \subset \pi$ si denoti con r_∞ la giacitura della retta r: se r e s sono due rette del piano, risulterà $r_\infty = s_\infty$ se e solo se r e s sono parallele. Data una retta r, il punto r_∞ può essere interpretato come il punto improprio del completamento r^-.

Si definisca l'insieme

$$\pi_\infty = \{r_\infty | r \text{ retta in } \pi\} = \{\text{giaciture delle rette di } \pi\}.$$

L'insieme

$$\pi^- = \pi \cup \pi_\infty$$

è detto *completamento proiettivo del piano affine* π. L'insieme π_∞ è l'insieme dei punti impropri delle rette di π e i suoi elementi vengono detti i *punti impropri* (o punti all'infinito) di π^-. Per distinguerli, i punti di π vengono detti *punti propri*.

La scelta di un sistema di coordinate (x, y) in π definisce la biezione:

$$\begin{aligned} \pi^- &\to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \\ \pi \ni Q(x,y) &\mapsto [1,x,y] \\ r_\infty &\mapsto [0,l,m] \text{ ove } (l,m) \text{ sono le componenti, nel riferimento di } \pi, \\ &\quad\ \text{di un vettore direttore di } r \end{aligned} \tag{5.61}$$

che viene detto *sistema di coordinate omogenee sul completamento proiettivo del piano* π. Osserviamo che l'immagine dei punti impropri è costituita da tutti i punti $[X_0, X_1, X_2]$ del piano proiettivo numerico tali che $X_0 = 0$. Infatti, se $X_0 \neq 0$, il punto $[X_0, X_1, X_2]$ è immagine del punto proprio $Q(X_1/X_0, X_2/X_0)$ di π. La relazione tra le coordinate affini e quelle omogenee è dunque data da:

$$x = X_1/X_0, y = X_2/X_0. \tag{5.62}$$

Proviamo ad applicare ai punti di una retta affine la trasformazione definita in (5.61); consideriamo la retta affine r passate per un punto $P(p_x, p_y)$ e di vettore direttore

$\mathbf{v}$ di componenti (l, m) nel riferimento fissato: ogni punto di tale retta ha coordinate affini della forma $Q_t(p_x + t\,l, p_y + t\,m)$ e coordinate omogenee

$$Q_t(p_x + t\,l, p_y + t\,m) \mapsto [1, p_x + t\,l, p_y + t\,m]$$

Per $t \neq 0$, si ha che $[1, p_x + t\,l, p_y + t\,m] = [1/t, \frac{p_x}{t} + l, \frac{p_y}{t} + m]$; se t è un parametro reale,

$$\lim_{t \to \pm\infty} (1/t, \frac{p_x}{t} + l, \frac{p_y}{t} + m) = (0, l, m)$$

che è un vettore di coordinate omogenee assegnato al punto improprio r_∞ della retta r. Osserviamo che $mx - ly + (mp_x + lp_y) = 0$ è una equazione cartesiana per la retta r nel riferimento affine. Proviamo a sostituire l'applicazione inversa $x = X_1/X_0, y = X_2/X_0$ definita in (5.62) quando $X_0 \neq 0$: ricaviamo l'equazione $m(X_1/X_0) - l(X_2/X_0) + (mp_x + lp_y) = 0$ che, per $X_0 \neq 0$, è equivalente a

$$mX_1 - lX_2 + (mp_x + lp_y)X_0 = 0 \tag{5.63}$$

Osserviamo che l'equazione (5.63) è omogenea, e quindi una terna non nulla (X_0, X_1, X_2) ne è soluzione se e solo se ogni rappresentante di $[X_0, X_1, X_2]$ è soluzione. Inoltre, tutte (e sole) le soluzioni (X_0, X_1, X_2) di (5.63) con $X_0 \neq 0$ sono le coordinate omogenee dei punti propri di r, mentre le soluzioni non nulle con $X_0 = 0$ sono tutte e sole le terne della classe $[0, l, m]$ (che corrisponde al punto improprio r_∞). *Possiamo dunque interpretare (5.63) come una equazione in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, le cui soluzioni sono le coordinate omogenee dei punti del completamento proiettivo r^-.* In particolare, *il completamento proiettivo del piano π contiene tutti i completamenti proiettivi delle rette di π.* Si dice che l'equazione (5.63) si ottengono dall'equazione affine $mx - ly + (mp_x + lp_y) = 0$ tramite il procedimento di *omogeneizzazione*: nell'equazione affine si operano le seguenti sostituzioni: $x \mapsto X_1$, $y \mapsto X_2$ e si utilizza il termine noto come coefficiente di X_0.

Presa una qualsiasi retta s di π parallela a r, si avrà che le coordinate omogenee di r_∞ coincidono con le coordinate omogenee di s_∞: i completamenti proiettivi r^- e s^- hanno in comune lo stesso punto improprio.

Definizione 5.8.9. Sia $f(x, y)$ un polinomio di grado d nelle indeterminate x, y. Il polinomio omogeneizzato di f è il polinomio

$$f_h(X_0, X_1, X_2) = (X_0)^d f(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}).$$

Il dato di un riferimento sul piano affine π definisce quindi un sistema di coordinate omogenee nel completamento proiettivo di π: in particolare, tale corrispondenza assegna un ruolo speciale ai punti della forma $[l, m, 0]$. Si osservi che l'applicazione definita in (5.61) dipende dalla scelta del riferimento $\mathcal{R} = \{O, (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\}$ in π: l'immagine dell'origine O (cioè le sue coordinate omogenee) è $[0, 0, 1]$, mentre l'immagine del punto improprio dell'asse x (parallelo a $\mathbf{v}_1$) è $X_\infty = [1, 0, 0]$ e l'immagine del punto improprio dell'asse y (parallelo a $\mathbf{v}_2$) è $Y_\infty = [0, 1, 0]$. Infine, il punto $U(1, 1)$, detto *punto unità*, ha coordinate omogenee $[1, 1, 1]$. In un altro riferimento affine (x', y') la relazione tra le coordinate affini sarà della forma:

$$\begin{cases} x' = m_{11}x + m_{12}y + s_1 \\ y' = m_{21}x + m_{22}y + s_2 \end{cases} \qquad det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Il sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1, X'_2]$ definito a partire dal nuovo sistema di riferimento associa:

$$Q(x', y') \mapsto [1, x', y'] = [1, m_{11}x + m_{12}y + s_1, m_{21}x + m_{22}y + s_2].$$

La relazione tra le coordinate omogenee indotte dai due riferimenti di r è dunque data da:

$$\begin{cases} \rho X'_0 = X_0 \\ \rho X'_1 = s_1 X_0 + m_{11} X_0 + m_{12} X_1 \\ \rho X'_2 = s_2 X_0 + m_{21} X_0 + m_{22} X_1 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, \tag{5.64}$$

cioè

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & m_{11} & m_{12} \\ s_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0,$$

In particolare, qualunque sia il riferimento cartesiano scelto su π, ai punti impropri di π vengono sempre associate coordinate omogenee della forma $[0, l, m]$.

Osservazione 5.8.10. Osserviamo il cambiamento descritto in (5.64) trasforma i punti con la terza coordinata nulla in punti del piano proiettivo con la stessa caratteristica.

Osservazione 5.8.11. Riprendiamo il sistema di coordinate omogenee del completamento proiettivo di un piano affine, definito nell'esempio 5.8.8 a partire dalla scelta di un riferimento cartesiano. I punti impropri del piano affine sono tutti e soli i punti della retta di equazione $X_0 = 0$, che per questo motivo viene detto la *retta impropria*.

Se $(a, b) \neq (0, 0)$*, la retta* r *di equazione* $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ *è il completamento proiettivo di una retta affine e interseca la retta impropria in uno ed un solo punto,* $[-b, a, 0]$*, che è il punto improprio della retta.* Infatti, i punti propri di r sono i punti della retta affine di equazione $ax + by + c = 0$:

$$aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \Leftrightarrow a(X_1/X_0) + b(X_2/X_0) + c = 0 \text{ se } X_0 \neq 0;$$

inoltre, il punto $[0, -b, a]$ è l'unico punto di r che sia improprio (e coincide con il punto improprio dato dalla giacitura della retta affine di equazione $ax + by + c = 0$).

Ogni retta affine di π *corrisponde ad una ed una sola retta proiettiva del completamento* π^-*, e l'equazione omogenea della retta proiettiva corrispondente si ottiene omogeneizzando l'equazione affine (come nella Definizione 5.8.9).* La retta impropria $X_0 = 0$ è l'unica retta di π^- che non è completamento proiettivo di una retta di π.

Se due rette affini distinte del piano affine sono incidenti in un punto P, i loro completamenti proiettivi si intersecano solo in P. Se invece le due rette affini sono parallele e distinte, i loro completamenti proiettivi si intersecano nel loro punto improprio.

Nel caso del piano proiettivo il teorema 5.5.4 diventa:

Teorema 5.8.12. Teorema fondamentale delle proiettività nel piano proiettivo *Siano* (A, B, C, D) *e* (A', B', C', D') *due quaterne di punti di* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ *in posizione generale. Allora esiste una e una sola proiettività* $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ *tale che*

$$\varphi(A) = A', \varphi(B) = B', \varphi(C) = C', \varphi(D) = D'.$$

Dimostrazione. Consideriamo le coordinate omogenee dei punti: $A = [\mathbf{a}]$, $B = [\mathbf{b}]$, $C = [\mathbf{c}]$, $D = [\mathbf{d}]$, $A' = [\mathbf{a}']$, $B' = [\mathbf{b}']$, $C' = [\mathbf{c}']$, $D' = [\mathbf{d}']$. La proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ cercata esiste se e solo se esiste una applicazione lineare iniettiva $\psi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ ed esistono opportuni scalari λ, μ, ν, ρ tutti non nulli, tali che

$$\psi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}', \psi(\mathbf{b}) = \mu\mathbf{b}', \psi(\mathbf{c}) = \nu\mathbf{c}', \psi(\mathbf{d}) = \rho\mathbf{d}'.$$

Poiché per ipotesi $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ e $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ sono indipendenti, essi sono riferimenti di $\mathbb{K}^4$. Dunque scelti comunque gli scalari non nulli λ, μ, ν esiste ed è unica l'applicazione lineare iniettiva $\psi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ tale che $\psi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}', \psi(\mathbf{b}) = \mu\mathbf{b}', \psi(\mathbf{c}) = \nu\mathbf{c}'$. Il problema è dunque quello di determinare scalari λ, μ, ν tutti non nulli, in modo che esista poi uno scalare non nullo ρ, tale che $\psi(\mathbf{d}) = \rho\mathbf{d}'$. Osserviamo che $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$ dipendono linearmente da $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ e $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ rispettivamente, ossia si hanno relazioni del tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= t_0\mathbf{a} + t_1\mathbf{b} + t_2\mathbf{c} \\ \mathbf{d}' &= s_0\mathbf{a}' + s_1\mathbf{b}' + s_2\mathbf{c}' \end{aligned}$$

Notiamo che in tali relazioni i coefficienti sono tutti non nulli, grazie all'ipotesi che le quaterne di punti sono in posizione generale.

Ora la condizione richiesta sugli scalari λ, μ, ν è che:

$$\psi(\mathbf{d}) = \rho\mathbf{d}' = \rho(s_0\mathbf{a}' + s_1\mathbf{b}' + s_2\mathbf{c}')$$

e, contemporaneamente, che:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{d}) = \psi(t_0\mathbf{a} + t_1\mathbf{b} + t_2\mathbf{c}) &= t_0\psi(\mathbf{a}) + t_1\psi(\mathbf{b}) + t_2\psi(\mathbf{c}) \\ &= \lambda t_0\mathbf{a}' + \mu t_1\mathbf{b}' + \nu t_2\mathbf{c}'. \end{aligned}$$

Per l'indipendenza lineare di $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ queste due uguaglianze si traducono nella condizione seguente

$$\begin{cases} \lambda t_0 - \rho s_0 = 0 \\ \mu t_1 - \rho s_1 = 0 \\ \nu t_2 - \rho s_2 = 0 \end{cases}$$

e questo si può interpretare come un sistema lineare $\mathcal{A}$ omogeneo di 3 equazioni nelle 4 incognite λ, μ, ν, ρ. Ogni soluzione non nulla di $\mathcal{A}$ è tale che nessuna sua componente è nulla, e quindi essa dà luogo ad una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con la proprietà richiesta. Inoltre soluzioni proporzionali e non nulle di $\mathcal{A}$ danno luogo alla stessa proiettività. Infine ogni proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con la proprietà richiesta si ottiene in tal modo. Per concludere la dimostrazione basta allora verificare che l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{A}$ è un sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{K}^4$. Ma ciò è chiaro, perché la matrice di $\mathcal{A}$ è data da:

$$\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & -s_0 \\ 0 & t_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 0 & t_2 & -s_2 \end{pmatrix}$$

e il suo minore determinato dalle prime 3 colonne è non nullo.

□

Esempio 5.8.13. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, comunque fissati 4 punti A_1, A_2, A_3, A_4, a tre a tre non allineati. Per il Teorema 5.8.12, esiste uno ed un solo sistema di coordinate omogenee tale che A_1, A_2, A_3, A_4 abbiano, rispettivamente, coordinate$[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$. Ad esempio, siano $A_1[1,2,3]$, $A_2[0,1,1]$, $A_3[1,0,2]$, $A_4[1,-1,0]$. In analogia con la dimostrazione del teorema 5.7.7 la matrice $\mathbf{M}$ dell'applicazione $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, si calcola facilmente come l'inversa della matrice $\mathbf{N}$ della forma:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \lambda_2 \\ 2\lambda_0 & \lambda_1 & 0 \\ 3\lambda_0 & \lambda_1 & 2\lambda_2 \end{pmatrix}$$

ove $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sono tre costanti non nulle tali che:

$$\mathbf{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_2 \\ 2\lambda_0 + \lambda_1 \\ 3\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ricava che la scelta $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\rho = 1$ va bene. Dunque il sistema di coordinate $[X'_0, X'_1, X'_2]$ cercate è dato da

$$\begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

5.9 Lo spazio proiettivo numerico di dimensione 3

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Su $\mathbb{K}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ è definita la *relazione di proporzionalità* $\mathcal{P}$:

$$(X_0, X_1, X_2, X_3)\mathcal{P}(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{esiste } \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che} \\ (X_0, X_1, X_2, X_3) = \rho(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3), \\ \text{cioè } X_0 = \rho Y_0, X_1 = \rho Y_1, X_2 = \rho Y_2, X_3 = \rho Y_3 \end{array}$$

che è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathbb{K}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathcal{P}$ si denota anche col simbolo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ o più semplicemente $\mathbb{P}^3$ e si dice *spazio proiettivo numerico di dimensione* 3 (o, più semplicemente, *spazio proiettivo*) e i suoi elementi sono detti *punti* dello spazio proiettivo. La classe di equivalenza di una coppia ordinata non nulla (X_0, X_1, X_2, X_3) si denota con il simbolo:

$$[X_0, X_1, X_2, X_3] = \{(\rho X_0, \rho X_1, \rho X_2, \rho X_3) | \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\};$$

si dice che la terna (X_0, X_1, X_2, X_3) (e ogni terna ad essa equivalente) costituisce le *coordinate omogenee* del punto $[X_0, X_1, X_2, X_3]$. Le coordinate omogenee di un punto formano dunque una terna ordinata mai nulla, che è determinata solo a meno di multiplo per un fattore costante non nullo.

Definizione 5.9.1. Un *cambiamento di riferimento proiettivo* (o *cambiamento di sistema di coordinate omogenee*) in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ (o, più in generale, su uno spazio proiettivo) è una trasformazione $[X_0, X_1, X_2, X_3] \mapsto [X'_0, X'_1, X'_2, X'_3]$ ove

$$\begin{cases} \rho X'_0 = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 + m_{02}X_2 + m_{03}X_3 \\ \rho X'_1 = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 + m_{12}X_2 + m_{13}X_3 \\ \rho X'_2 = m_{20}X_0 + m_{21}X_1 + m_{22}X_2 + m_{23}X_3 \\ \rho X'_3 = m_{30}X_0 + m_{31}X_1 + m_{32}X_2 + m_{33}X_3 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, det(m_{ij})_{ij} \neq 0;$$

in forma matriciale la relazione si scrive come:

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0,$$

Osservazione 5.9.2. Il cambio di riferimento individua la matrice $M = (m_{ij})_{ij}$ solo a meno di una costante non nulla.

I sottospazi proiettivi propri di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ sono i punti, le rette e i piani.

Definizione 5.9.3. Un *piano* di $\mathbb{P}^3_K$ è l'insieme dei punti le cui coordinate omogenee soddisfa una equazione omogenea lineare non nulla della forma:

$$a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0 \tag{5.65}$$

Definizione 5.9.4. Una *retta* di $\mathbb{P}^3_K$ è l'insieme dei punti le cui coordinate omogenee soddisfa una equazione della forma:

$$\begin{cases} a_{11}X_0 + a_{12}X_1 + a_{13}X_2 + a_{14}X_3 = 0 \\ a_{12}X_0 + a_{22}X_1 + a_{23}X_2 + a_{24}X_3 = 0 \end{cases}$$

con la condizione che:

$$rg \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = 2.$$

Le definizioni di retta e piano di $\mathbb{P}^3_K$ sono invarianti per cambi di coordinate.

Osservazione 5.9.5. **Equazioni parametriche di un piano** Si consideri il piano α di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ di equazione (5.65). L'insieme delle quaterne numeriche che sono soluzione dell'equazione omogenea forma un sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{K}^4$: siano

$$\{\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3), \mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3), \mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)\}$$

una base di tale sottospazio vettoriale. I punti $P[p_0, p_1, p_2, p_3]$, $Q[q_0, q_1, q_2, q_3]$ e $S[s_0, s_1, s_2, s_3]$ sono punti distinti di α e ogni altro punto ha coordinate omogenee della forma

$$[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} + \nu\mathbf{s}]$$

I punti del piano sono dunque tutti e soli i punti della forma

$$\begin{cases} \rho X_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 + \nu s_0 \\ \rho X_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 + \nu s_1 \\ \rho X_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 + \nu s_2 \\ \rho X_3 = \lambda p_3 + \mu q_3 + \nu s_3 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0. \tag{5.66}$$

Definizione 5.9.6. Equazioni della forma (5.66) sono dette *equazioni parametriche del piano proiettivo*.

Le equazioni parametriche del piano dipendono dalla scelta di tre punti le cui coordinate omogenee generano un sottospazio di $\mathbb{K}^4$ di dimensione 3: si dice che i tre punti sono *indipendenti*; tale condizione è equivalente a chiedere che i tre punti non siano allineati. Viceversa, *esiste un unico piano passante per tre punti indipendenti* (si veda anche l'Esempio 5.9.11).

Osservazione 5.9.7. **Mutua posizione di due piani ed equazioni parametriche di una retta** Dati due piani distinti α e α' di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$, la loro intersezione è data dai punti di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ le cui coordinate omogenee soddisfano un sistema lineare omogeneo della forma

$$\begin{cases} u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0 \\ u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2 + u'_3X_3 = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti ha rango 2: per definizione, tale intersezione è una retta di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$. L'insieme delle quaterne numeriche che sono soluzione del sistema forma un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{K}^4$; fissiamo una base $\{\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3), \mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)\}$ di tale sottospazio. I punti $P[p_0, p_1, p_2, p_3]$ e $Q[q_0, q_1, q_2, q_3]$ sono punti distinti dell'intersezione e ogni altro punto ha coordinate omogenee della forma

$$[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}]$$

I punti della retta sono dunque della forma

$$\begin{cases} \rho X_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ \rho X_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \rho X_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \\ \rho X_3 = \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases} \qquad \exists\rho \neq 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0). \tag{5.67}$$

Definizione 5.9.8. Un sistema di equazioni della forma (5.67) è detto *sistema di equazioni parametriche della retta proiettiva.*

Le equazioni parametriche di una retta dipendono dalla scelta di due punti distinti sulla retta. Viceversa, ogni insieme di punti con coordinate della forma (5.67) con P e Q distinti è una retta. In particolare, *per ogni coppia di punti distinti passa una ed una sola retta.*

Esempio 5.9.9. **Mutua posizione di due rette** Si considerino due rette di $\mathbb{P}^3$, rappresentate dai sistemi:

$$\begin{cases} u_{00}X_0 + u_{01}X_1 + u_{02}X_2 + u_{03}X_3 = 0 \\ u_{10}X_0 + u_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = 0 \end{cases} \tag{5.68}$$

e

$$\begin{cases} u'_{00}X_0 + u'_{01}X_1 + u'_{02}X_2 + u'_{03}X_3 = 0 \\ u'_{10}X_0 + u'_{11}X_1 + u'_{12}X_2 + u'_{13}X_3 = 0 \end{cases} \tag{5.69}$$

esse sono complanari se e solo se il sistema

$$\begin{cases} u_{00}X_0 + u_{01}X_1 + u_{02}X_2 + u_{03}X_3 = 0 \\ u_{10}X_0 + u_{11}X_1 + u_{12}X_2 + u_{13}X_3 = 0 \\ u'_{00}X_0 + u'_{01}X_1 + u'_{02}X_2 + u'_{03}X_3 = 0 \\ u'_{10}X_0 + u'_{11}X_1 + u'_{12}X_2 + u'_{13}X_3 = 0 \end{cases} \tag{5.70}$$

ha qualche soluzione non banale (corrispondente a qualche punto a comune alle due rette. Ciò accade se e solo se la matrice del sistema non ha rango massimo, ossia se e solo se:

$$\det \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u'_{00} & u'_{01} & u'_{02} & u'_{03} \\ u'_{10} & u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \end{pmatrix} = 0$$

In particolare le due rette coincidono se e solo se il rango della prima matrice è 2 (caso in cui il sistema (5.70) è equivalente ad uno qualunque dei due sistemi (5.68) e (5.69)). Se il rango della matrice di (5.70) è 3, vi è un unico piano contenente le due rette. Le due rette sono sghembe se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u'_{00} & u'_{01} & u'_{02} & u'_{03} \\ u'_{10} & u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \end{pmatrix} \neq 0$$

□

Esempio 5.9.10. **Condizioni di allineamento di tre punti** Tre punti X, P, Q di $\mathbb{P}^3$ sono allineati se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \leq 2$$

Se i due punti P e Q sono distinti, la richiesta equivale al fatto che la matrice non abbia rango 3; per imporla, basta annullare tutti i determinanti delle sottomatrici 3×3:

$$\begin{cases} det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = 0 \\ det \begin{pmatrix} X_0 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = 0 \\ det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_3 \end{pmatrix} = 0 \\ det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

In base alla teoria dei sistemi lineari omogenei, le equazioni così ottenute non sono linearmente indipendenti, perché sono 4, mentre il numero minimo di equazioni di un sistema equivalente è 2. Per trovare un sistema minimo di equazioni, basta sceglierne 2 indipendenti (o procedere orlando un minore 2×2 non nullo).

Esempio 5.9.11. **Condizioni di complanarità di tre punti** Quattro punti X, P, Q, S di $\mathbb{P}^3$ sono allineati se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} \leq 3 \text{ cioè se e solo se } det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} = 0; \qquad (5.71)$$

Osserviamo che la seconda condizione in (5.71) fornisce una equazione cartesiana del piano per P, Q, S se tali punti sono indipendenti.

Definizione 5.9.12. Sia $f(x, y, z)$ un polinomio di grado d nelle indeterminate x, y, z. Il *polinomio omogeneizzato* di f (o *polinomio omogeneo associato* a $f(x, y, z)$) è il polinomio

$$f_h(X_0, X_1, X_2, X_3) = (X_0)^d f(X_1/X_0, X_2/X_0, X_3/X_0).$$

Si osservi che per passare da un polinomio $f(x, y, z)$ al polinomio omogeneo associato si operano le seguenti sostituzioni: $x \mapsto X_1$, $y \mapsto X_2$, $z \mapsto X_3$, e si introduce in ogni monomio di f una potenza di X_0 in modo da rendere omogeneo il monomio.

Esempio 5.9.13. **Completamento proiettivo di uno spazio affine di dimensione** 3 Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{E}$ (o lo spazio complesso se $K = \mathbb{C}$). Per ogni retta $r \subset \mathbb{E}$ si denoti con r_∞ la sua giacitura, che costituisce il punto improprio del completamento r^-. Si definisca l'insieme

$$\mathbb{E}_\infty = \{r_\infty | r \text{ retta in } \mathbb{E}\};$$

L'insieme $\mathbb{E}_\infty$ è l'insieme dei punti impropri delle rette di $\mathbb{E}$ e i suoi elementi vengono detti i *punti impropri* di $\mathbb{E}$. Per distinguerli, i punti di $\mathbb{E}$ vengono detti *punti propri.* L'insieme

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}) = \mathbb{E} \cup \mathbb{E}_\infty$$

è detto *completamento proiettivo dello spazio affine* $\mathbb{E}$.

La scelta di un sistema di riferimento $\mathcal{R}$ in $\mathbb{E}$, di coordinate (x, y, z), definisce la biezione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{E}) &\to \mathbb{P}^3_K \\ \mathbb{E} \ni Q(x, y, z) &\mapsto [0, x, y, z] \\ r_\infty &\mapsto [0, l, m, n] \text{ ove } (l, m, n) \text{ sono le componenti, nel riferimento di } \mathbb{E}, \\ & \quad\ \text{di un vettore direttore di } r \end{aligned} \tag{5.72}$$

che viene detto *sistema di coordinate omogenee sul completamento proiettivo dello spazio* $\mathbb{E}$ *associato al sistema (affine)* $\mathcal{R}$. Osserviamo che l'immagine dei punti impropri è costituita da tutti i punti $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ del piano proiettivo numerico tali che $X_0 = 0$. Infatti, se $X_0 \neq 0$, il punto $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ è immagine del punto proprio $Q(X_1/X_0, X_2/X_0, X_3/X_0)$ di $\mathbb{E}$. La relazione tra le coordinate affini e quelle omogenee è dunque data da:

$$x = X_1/X_0, y = X_2/X_0, z = X_3/X_0 \text{ se } X_0 \neq 0. \tag{5.73}$$

Proviamo ad applicare ai punti di una retta affine la trasformazione definita in (5.72); consideriamo la retta affine r passate per un punto $P(p_x, p_y, p_z)$ e di vettore direttore $\mathbf{v}$ di componenti (l, m, n) nel riferimento fissato: ogni punto di tale retta ha coordinate affini della forma $Q_t(p_x + t\,l, p_y + t\,m, p_z + t\,n)$ e coordinate omogenee

$$Q_t(p_x + t\,l, p_y + t\,m, p_z + t\,n) \mapsto [0, p_x + t\,l, p_y + t\,m, p_z + t\,n]$$

Per $t \neq 0$, si ha che

$$[1, p_x + t\,l, p_y + t\,m, p_z + t\,n] = [\frac{1}{t}, \frac{p_x}{t}) + l, \frac{p_y}{t} + m, \frac{p_z}{t} + n];$$

se t è un parametro reale,

$$\lim_{t\to\pm\infty}(\frac{1}{t}, \frac{p_x}{t}+l, \frac{p_y}{t}+m, \frac{p_z}{t}+n) = (0, l, m, n)$$

che è un vettore di coordinate omogenee del punto improprio r_∞ della retta r.

Osserviamo che un sistema di equazioni cartesiane per la retta euclidea r in $\mathbb{E}$, nel riferimento scelto, è dato da

$$\begin{cases} m(x-p_x) = l(y-p_y) \\ n(x-p_x) = l(z-p_z) \end{cases} \text{cioè} \begin{cases} mx - ly + lp_y - mp_x = 0 \\ nx - lz + lp_z - np_x = 0 \end{cases}. \tag{5.74}$$

Proviamo a sostituire l'applicazione inversa $x = X_1/X_0, y = X_2/X_0, z = X_3/X_0$ definita in (5.73) quando $X_4 \neq 0$: ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} m(X_1/X_0) - l(X_2/X_0) + lp_y - mp_x = 0 \\ n(X_1/X_0) - l(X_3/X_0) + lp_z - np_x = 0 \end{cases}$$

che, per $X_0 \neq 0$, è equivalente a

$$\begin{cases} mX_1 - lX_2 + (lp_y - mp_x)X_0 = 0 \\ nX_1 - lX_3 + (lp_z - np_x)X_0 = 0 \end{cases}. \tag{5.75}$$

Osserviamo che il sistema (5.75) è omogenea, e quindi una quaterna non nulla (X_0, X_1, X_2, X_3) ne è soluzione se e solo se ogni rappresentante di $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ è soluzione. Inoltre, tutte (e sole) le soluzioni (X_0, X_1, X_2, X_3) di (5.75) con $X_0 \neq 0$ sono le coordinate omogenee dei punti propri di r, mentre le soluzioni non nulle con $X_0 = 0$ sono tutte e sole le terne della classe $[0, l, m, n]$ (che corrisponde al punto improprio r_∞). *Possiamo dunque interpretare (5.75) come una equazione in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$, le cui soluzioni sono le coordinate omogenee dei punti del completamento proiettivo* $\mathbb{P}(r)$. In particolare, *il completamento proiettivo del piano $\mathbb{E}$ contiene tutti i completamenti proiettivi delle rette di $\mathbb{E}$*. Si dice che le equazioni (5.75) si ottengono dalle equazioni affini (5.74) tramite il procedimento di *omogeneizzazione* (vedi Definizione 5.9.12).

Presa una qualsiasi retta s di π parallela a r, si avrà che le coordinate omogenee di r_∞ coincidono con le coordinate omogenee di s_∞: i completamenti proiettivi $\mathbb{P}(r)$ e $\mathbb{P}(s)$ hanno in comune lo stesso punto improprio.

Sia π un piano dello spazio euclideo, di equazione cartesiana $ax+by+cz+d = 0$. In modo analogo a quanto osservato per le rette, si controlla facilmente che l'insieme dei punti $P[X_0, X_1, X_2, X_3]$ le cui coordinate soddisfano l'equazione omogeneizzata (seguendo la Definizione 5.9.12): $aX_1+bX_2+cX_3+dX_0 = 0$ è formato esattamente dai punti di π e da tutti i punti impropri delle rette di π, e coincide dunque con il completamento proiettivo di π.

Il piano $X_0 = 0$ è detto *piano improprio* e non è completamento proiettivo di un piano di $\mathbb{E}$. A partire dall'equazione omogenea $aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_0 = 0$ di un piano H con $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$, si ritrova l'equazione affine $ax + by + cz + d = 0$ dei punti propri di H sostituendo $X_1 \mapsto x$, $X_2 \mapsto y$, $X_3 \mapsto z$ e ponendo $X_0 = 1$.

Si osservi che l'applicazione definita in (5.72) dipende dalla scelta del riferimento $\mathcal{R} = \{O, (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\}$ in π: l'immagine dell'origine O (cioè le sue coordinate omogenee) è $[1, 0, 0, 0]$, mentre l'immagine del punto improprio dell'asse x (parallelo a $\mathbf{v}_1$) è $X_\infty = [0, 1, 0, 0]$, l'immagine del punto improprio dell'asse y (parallelo a $\mathbf{v}_2$) è $Y_\infty = [0, 0, 1, 0]$, l'immagine del punto improprio dell'asse z (parallelo a $\mathbf{v}_3$) è

$Z_\infty = [0,0,0,1]$. Infine, il punto $U(1,1,1)$, detto *punto unità*, ha coordinate omogenee $[1,1,1,1]$. In un altro riferimento affine (x',y',z') la relazione tra le coordinate affini sarà della forma:

$$\begin{cases} x' = m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z + s_1 \\ y' = m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z + s_2 \\ z' = m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + s_3 \end{cases} \qquad det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Il sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1, X_2, X'_3]$ definito a partire dal nuovo sistema di riferimento associa:

$$\begin{aligned} Q(x',y',z') &\mapsto [1,x',y',z'] = \\ &= [1, m_{11}x + m_{12}y + s_1, m_{21}x + m_{22}y + s_2, m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + s_3]. \end{aligned}$$

La relazione tra le coordinate omogenee indotte dai due riferimenti di r è dunque data da:

$$\begin{cases} \rho X'_0 = X_0 \\ \rho X'_1 = s_1 X_0 + m_{11}X_1 + m_{12}X_2 + m_{13}X_3 \\ \rho X'_2 = s_2 X_0 + m_{21}X_1 + m_{22}X_2 + m_{23}X_3 \\ \rho X'_3 = s_3 X_0 + m_{31}X_1 + m_{32}X_2 + m_{33}X_3 \end{cases} \qquad \exists \rho \neq 0, \qquad (5.76)$$

cioè

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ s_2 & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ s_3 & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad \exists \rho \neq 0,$$

In particolare, qualunque sia il riferimento cartesiano scelto su $\mathbb{E}$, ai punti impropri di $\mathbb{E}$ vengono sempre associate coordinate omogenee della forma $[0,a,b,c]$.

Osservazione 5.9.14. Osserviamo che il cambiamento descritto in (5.76) trasforma i punti con la prima coordinata nulla in punti dello spazio proiettivo con la stessa caratteristica.