4

Spazi Euclidei

4.1 Definizione di spazio euclideo e generalità.

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine di dimensione finita n su $\mathbb{R}$. Si dice che $\mathbb{E}$ è uno *spazio euclideo* se sullo spazio vettoriale reale $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ è assegnato un prodotto scalare definito positivo, che denoteremo con $\times$, cioè una applicazione

$$\begin{aligned} \times : \mathbf{V}(\mathbb{E}) \times \mathbf{V}(\mathbb{E}) &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w} \end{aligned}$$

tale che:

a) $\times$ è simmetrica: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$;

b) $\times$ è bilineare:

$$\begin{aligned} &(k\mathbf{v} + h\mathbf{v}') \times \mathbf{w} = k\mathbf{v} \times \mathbf{w} + h\mathbf{v}' \times \mathbf{w} \\ &\mathbf{v} \times (k\mathbf{w} + h\mathbf{w}') = \mathbf{v} \times k\mathbf{w} + \mathbf{v} \times h\mathbf{w}' \text{ per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbf{V}(\mathbb{E}), k, h \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

c) $\times$ è definita positiva: $\mathbf{v} \times \mathbf{v} \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Esempio 4.1.1. Il tipico esempio di spazio euclideo è lo spazio affine della geometria euclidea, laddove si consideri assegnato nello spazio $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}$ dei vettori geometrici, il prodotto scalare euclideo $\times$ definito nel seguito [cf. [1], cap. 18, par. 2].

Si considera assegnato un segmento non nullo u che viene utilizzato come unità di misura di lunghezza per i segmenti. Inoltre, gli angoli vengono misurati in radianti.

Come notato nel Capitoli 1, segmenti equipollenti hanno la stessa lunghezza: denotiamo con $|\mathbf{v}|$ la lunghezza del vettore geometrico $\mathbf{v}$ rispetto al vettore unitario u. Risultano così definite due applicazioni: la *lunghezza*

$$\begin{aligned} |\,.\,| : \mathcal{V}_{\mathbb{E}} &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto |\mathbf{v}| \end{aligned}$$

e la *norma* (il quadrato della lunghezza):

$$\begin{aligned} ||\,.\,|| : \mathcal{V}_{\mathbb{E}} &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto ||\mathbf{v}|| \overset{def}{=} |\mathbf{v}|^2. \end{aligned}$$

Il *prodotto scalare tra vettori geometrici* (o *prodotto scalare euclideo* in $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}$) è definito dalla posizione:

$$\begin{aligned} \times : \mathcal{V}_{\mathbb{E}} \times \mathcal{V}_{\mathbb{E}} &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w} \stackrel{def}{=} \tfrac{1}{2}(||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| - ||\mathbf{v}|| - ||\mathbf{w}||). \end{aligned}$$

In particolare, $||\mathbf{v}|| = \mathbf{v} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ è sicuramente nullo se $\mathbf{v}$ oppure $\mathbf{w}$ è nullo. Se, invece, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono entrambi non nulli, allora resta ben individuato l'angolo $\hat{\mathbf{vw}}$ del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$: applicando il teorema del coseno, ricaviamo che

$$2(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = ||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| - ||\mathbf{v}|| - ||\mathbf{w}|| = 2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,cos(\hat{\mathbf{vw}}) \tag{4.1}$$

e risulta che $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ se e solo se almeno uno dei due vettori è nullo oppure $cos(\hat{\mathbf{vw}}) = 0$. Inoltre, il prodotto scalare euclideo è una forma bilineare simmetrica definita positiva e la norma è una forma quadratica.

Dato uno spazio euclideo $\mathbb{E}$, due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ si dicono *ortogonali* o *perpendicolari* se lo sono rispetto al prodotto scalare $\times$, cioè se e solo se $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$: in tal caso, scriviamo

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w}.$$

Per *lunghezza* di un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ si intende il numero reale

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}} \tag{4.2}$$

che si denota anche con il simbolo v. Poiché $\times$ è definito positivo, $\mathbf{v} = 0$ se e solo se $v = 0$. Un vettore di lunghezza 1 si dice un *versore*.

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz (cf. [1], teorema (20.13)), per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$, si ha che

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|, \tag{4.3}$$

da cui segue la doppia disuguaglianza (cf. [1], corollario (20.14)):

$$|\,|\mathbf{v}| - |\mathbf{w}|\,| \leq |\mathbf{v}+\mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}| \tag{4.4}$$

Definizione 4.1.2. In uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ la *distanza* $d(P,Q)$ di due punti P e Q è definita ponendo

$$d(P,Q) = |\mathbf{P} - \mathbf{Q}|. \tag{4.5}$$

Nel caso $\mathbb{E}$ coincida con lo spazio della geometria euclidea, la distanza di due punti P e Q è esattamente la lunghezza del segmento PQ che unisce i due punti.

Le proprietà fondamentali della distanza così definita sono le seguenti:
(D1) *Positività*: per ogni coppia P, Q di punti di $\mathbb{E}$ si ha $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0$ se e solo se $P = Q$;
(D2) *Simmetria*: per ogni coppia P, Q di punti di $\mathbb{E}$ si ha $d(P,Q) = d(Q,P)$;
(D3) *Proprietà triangolare*: per ogni terna P, Q, R di punti di $\mathbb{E}$ si ha

$$|d(P,Q) - d(Q,R)| \leq d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R) \tag{4.6}$$

Le proprietà (D1) e (D2) sono immediata conseguenza del fatto che $\times$ è un prodotto scalare definito positivo, mentre (D3) segue dalla (4.4) (cfr. anche [1], cap. 20, par. 5).

Dati due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz la quantità $\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|}$ verifica la disuguaglianza

$$-1 \leq \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|} \leq 1; \tag{4.7}$$

esiste pertanto un numero $\vartheta \in [0, \pi]$ tale che

$$\vartheta = arccos\ (\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|}) \tag{4.8}$$

e questo numero si dice *misura principale dell'angolo formato dai vettori* $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e si denota col simbolo $\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$. Invece, ogni numero del tipo $\vartheta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, si dice una *misura dell'angolo formato da* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$, e con il simbolo $[\mathbf{vw}]$ si denota l'insieme $\{\vartheta + 2k\pi k \in \mathbb{Z}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ di tutte le misure dell'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Le funzioni trigonometriche di $\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$ si dicono *funzioni trigonometriche dell'angolo* formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e si ha pertanto

$$cos\,\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} sen\,\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} &= \sqrt{1 - cos^2\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}} = \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}{|\mathbf{v}|^2\cdot|\mathbf{w}|^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{v})(\mathbf{w}\times\mathbf{w}) - (\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}{(\mathbf{v}\times\mathbf{v})(\mathbf{w}\times\mathbf{w})}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}\times\mathbf{v})(\mathbf{w}\times\mathbf{w}) - (\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Osserviamo che, con tale definizione

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,cos(\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}).$$

Inoltre, applicando la bilinearità del prodotto scalare, otteniamo una estensione del Teorema del coseno (vedi (4.1))

$$||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| - ||\mathbf{v}|| - ||\mathbf{w}|| = (\mathbf{v}+\mathbf{w})\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - \mathbf{v}\times\mathbf{v} - \mathbf{w}\times\mathbf{w} = 2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,cos(\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}) = 2\mathbf{v}\times\mathbf{w}.$$

Ricordiamo che due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono *ortogonali* o *perpendicolari* se $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = 0$, ossia se $cos\,\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = 0$.

4.2 Riferimenti cartesiani monometrici ortogonali.

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo. Un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, R)$ di $\mathbb{E}$ si dice *monometrico ortogonale* se $R = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un riferimento di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$

ortogonale rispetto a $\times$, cioè tale che $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_j = 0$ $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Il riferimento $\mathcal{R}$ si dice invece *monometrico ortonormale* se $R = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un riferimento di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ ortonormale rispetto a $\times$, cioè tale che

$$\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \tag{4.11}$$

per ogni coppia di indici $i, j = 1, \ldots, n$, dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker, che vale 1 se $i = j$, vale 0 se $i \neq j$.

Se $\mathcal{R}$ è un riferimento monometrico ortonormale di $\mathbb{E}$ e se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$, aventi componenti $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(w_1, \ldots, w_n)$ rispettivamente in R, si ha

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n \tag{4.12}$$

ossia il prodotto scalare $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ coincide col prodotto scalare euclideo dei vettori numerici delle componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in R (cfr. [1], cap. 18, esempio 18.10 (a)). In particolare la lunghezza di un vettore $\mathbf{v}$ è data da

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \tag{4.13}$$

e i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ risultano ortogonali se e solo se

$$v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n = 0 \tag{4.14}$$

Le funzioni trigonometriche di due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono date da

$$\begin{aligned} cos\, \hat{\mathbf{vw}} &= \frac{(v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)}{\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + \ldots + w_n^2}} \\ sen\, \hat{\mathbf{vw}} &= \sqrt{\frac{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2) - (v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)^2}{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2)}} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Inoltre, poichè, considerata la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \\ w_1 & \ldots & w_n \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

si ha

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t| = (v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2) - (v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)^2 = \Sigma_{i,j=1,\ldots,n}(v_i w_j - w_i v_j)^2$$

la formula del seno può anche essere scritta come

$$sen\, \hat{\mathbf{vw}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|}{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2)}} \tag{4.17}$$

oppure come

$$sen\, \hat{\mathbf{vw}} = \sqrt{\Sigma_{i,j=1,\ldots,n} \frac{(v_i w_j - w_i v_j)^2}{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2)}} \tag{4.18}$$

Infine, se P e Q sono punti di $\mathbb{E}$ aventi in $\mathcal{R}$ coordinate cartesiane $(p_1, \ldots, p_n)$ e $(q_1, \ldots, q_n)$ rispettivamente, si ha

$$d(P,Q) = |P - Q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \ldots + (p_n - q_n)^2} \tag{4.19}$$

In particolare, se $\mathbb{E}$ ha dimensione 1 e P e Q hanno coordinate p e q rispettivamente, allora

$$d(P,Q) = |p - q|\,. \tag{4.20}$$

4.3 Ortogonalità.

Sia S un sottospazio affine dello spazio euclideo $\mathbb{E}$. Su S resta indotta in modo naturale una struttura di spazio euclideo, mediante la restrizione a $\mathbf{V}(S)$ del prodotto scalare fissato su $\mathbf{V}(\mathbb{E})$, e tale restrizione è definita positiva. Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ si dice *ortogonale* o *perpendicolare* a S, e si scrive $\mathbf{v} \perp S$ oppure $S \perp \mathbf{v}$, se $\mathbf{v}$ è ortogonale (rispetto al prodotto scalare $\times$) ad ogni vettore parallelo a S, cioè ad ogni vettore della giacitura $\mathbf{V}(S)$ di S:

$$\mathbf{v} \perp S \Leftrightarrow \text{ per ogni } \mathbf{w} \in \mathbf{V}(S) \text{ si ha } \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0. \tag{4.21}$$

Siano S e S' sottospazi affini di uno spazio euclideo $\mathbb{E}$. Si dice che S e S' sono *ortogonali* o *perpendicolari*, e si scrive $S \perp S'$, se ogni vettore parallelo a S è ortogonale ad ogni vettore parallelo a S':

$$S \perp S' \Leftrightarrow \text{ per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V}(S) \text{ e per ogni } \mathbf{w} \in \mathbf{V}(S') \text{ si ha } \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0. \tag{4.22}$$

Si noti che $S \perp S'$ se e solo se ogni vettore parallelo a S è ortogonale a S', ovvero se ogni vettore parallelo a S' è ortogonale a S. Notiamo pure che, in base alla definizione che abbiamo dato, i punti sono gli unici sottospazi ortogonali ad ogni altro sottospazio.

Proposizione 4.3.1. *Sia S un sottospazio di $\mathbb{E}$ di dimensione m. Un sottospazio S' ortogonale a S ha dimensione al più uguale a $n - m$. Esistono sottospazi ortogonali a S di ogni dimensione $d = 0, \ldots, n - m$. I sottospazi S' di dimensione $n - m$ ortogonali a S sono tra loro paralleli e ciascuno di essi interseca S in uno e un solo punto.*

Dimostrazione. Sia $S = P + \mathbf{W}$. Un sottospazio $S' = Q + \mathbf{W}'$ è ortogonale a S se e solo se $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}'^{\perp}$, o, equivalentemente, $\mathbf{W}' \subseteq \mathbf{W}^{\perp}$ (cfr. [1], cap. 19, par. 1). Da ciò segue immediatamente la limitazione sulla dimensione di S'.

In particolare, i sottospazi S' di dimensione $n - m$ e ortogonali a S hanno giacitura $\mathbf{W}^{\perp}$, e sono paralleli tra loro. Inoltre, lo spazio dei vettori si decompone in somma diretta ortogonale come $\mathbf{V}(\mathbb{A}) = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$; se $S' = Q + \mathbf{W}^{\perp}$, il vettore $\mathbf{PQ}$ si decompone in modo unico come $\mathbf{PQ} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{W}^{\perp}$, sicché $P + \mathbf{v} = Q - \mathbf{w}$ è l'unico punto di $S \cap S'$. □

Corollario 4.3.2. *Sia S un sottospazio di $\mathbb{E}$ di dimensione m e sia Q un punto di $\mathbb{E}$. Esiste uno e un solo sottospazio S' di dimensione $n-m$ ortogonale a S e passante per Q.*

Dimostrazione. Se $S = P + \mathbf{W}$ allora $S' = Q + \mathbf{W}^{\perp}$. □

Corollario 4.3.3. *Sia S un sottospazio di $\mathbb{E}$ di dimensione m. Il sottospazio S è individuato da un suo qualunque punto e da $n-m$ vettori ortogonali a S e linearmente indipendenti. In particolare un iperpiano è individuato da un suo qualsiasi punto e da un vettore non nullo ortogonale all'iperpiano.*

Dimostrazione. Sia $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-m}]$ un sistema linearmente indipendente (massimale) di vettori ortogonali a S. Se W è la giacitura di S, il sottospazio ortogonale $W^{\perp}$ è generato da $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-m}]$, sicché $W = < \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-m} >^{\perp}$. Di qui segue l'asserto. □

Supponiamo ora introdotto in $\mathbb{E}$ un riferimento monometrico ortonormale $\mathcal{R}$. Ogni iperpiano α ammette una equazione della forma

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c = 0$$

Il vettore $\mathbf{n}$ di componenti $(a_1, \dots, a_n)$ in $\mathcal{R}$ è ortogonale a α e genera la giacitura ortogonale a α: esso viene anche detto *vettore normale* ad α ed è vettore direttore per qualsiasi retta ortogonale a α. Se $Q(q_1, \dots, q_n) \in S$, un punto $P(x_1, \dots, x_n)$ appartiene a α se e solo se

$$\mathbf{QP} \times \mathbf{n} = a_1 (x_1 - q_1) + \ldots + a_n (x_n - q_n) = 0.$$

Più in generale, siano S e S' sottospazi di $\mathbb{E}$. Supponiamo che S abbia dimensione m e abbia in $\mathcal{R}$ un sistema normale $\mathcal{A}$ di equazioni del tipo

$$\mathcal{A} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ \ldots \\ a_{n-m,1}x_1 + \ldots + a_{n-m,n}x_n + c_{n-m} = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

Proposizione 4.3.4. *Il sottospazio S' è perpendicolare a S se e solo se per ogni vettore $\mathbf{v}$ parallelo a S', le componenti $(v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}$ soddisfano la relazione*

$$rg \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n-m,1} & \ldots & a_{n-m,m} \\ v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} = n - m. \tag{4.24}$$

Dimostrazione. Nel riferimento $\mathcal{R}$, la giacitura $\mathbf{W}$ di S ha come sistema di equazioni il sistema omogeneo $\mathcal{A}^{om}$ associato ad $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{om} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n-m,1}x_1 + \ldots + a_{n-m,n}x_n = 0 \end{cases} , \tag{4.25}$$

cioè un vettore di componenti $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ in $\mathcal{R}$ appartiene a $\mathbf{W}$ se e solo se ξ è una soluzione di $\mathcal{A}^{om}$. Sia ora $\mathbf{v}$ un vettore della giacitura $\mathbf{W}'$ di S' e ne siano $(v_1, \ldots, v_n)$ le componenti in $\mathcal{R}$. Se S è perpendicolare a S' allora ogni vettore di $\mathbf{W}$ è ortogonale ad ogni vettore di $\mathbf{W}'$, e quindi per ogni soluzione $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ di $\mathcal{A}^{om}$ si ha $v_1\xi_1 + \ldots + v_n\xi_n = 0$, ossia ξ è pure una soluzione dell'equazione

$$v_1x_1 + \ldots + v_nx_n = 0 \tag{4.26}$$

Ciò comporta che quest'ultima equazione (4.26) dipenda da $\mathcal{A}^{om}$, ossia che valga la (4.24). Viceversa se vale la (4.24) per ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{W}$, l'equazione (4.26) dipende dal sistema $\mathcal{A}^{om}$, e quindi ne ha tutte le soluzioni. Ciò implica che ogni vettore di $\mathbf{W}$ è ortogonale ad ogni vettore di $\mathbf{W}'$, cioè S è ortogonale a S'. □

Corollario 4.3.5. *(a) Se S' è una retta e S è un iperpiano avente in $\mathcal{R}$ equazione*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0, \tag{4.27}$$

allora S è perpendicolare a S' se e solo se una n-pla di numeri direttori di S' in $\mathcal{R}$ è data da $(a_1, \ldots, a_n)$.
(b) Se S e S' sono due rette di numeri direttori $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ in $\mathcal{R}$, allora S è perpendicolare a S' se e solo se

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = 0 \tag{4.28}$$

Se poi, nel riferimento $\mathcal{R}$, la retta S ha equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ \ldots \\ a_{n-1,1}x_1 + \ldots + a_{n-1,n}x_n + a_{n-1} = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

e la retta S' ha numeri direttori $(b_1, \ldots, b_n)$, allora S e S' sono perpendicolari se e solo se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n} \\ b_1 & \ldots & b_n \end{vmatrix} = 0 \tag{4.30}$$

Dimostrazione. Ovvia conseguenza della proposizione (4.3.4). □

Esempio 4.3.6. Sia $\mathbb{E}$ un piano euclideo e ne sia $\mathcal{R}$ un riferimento cartesiano monometrico ortonormale. Due rette S e S' aventi in $\mathcal{R}$ equazioni

$$ax + by + c = 0, \qquad a'x + b'y + c' = 0 \tag{4.31}$$

sono ortogonali se e solo se si ha

$$aa' + bb' = 0 \tag{4.32}$$

Infatti una coppia di numeri direttori di S [risp. di S'] è data da $(-b, a)$ [risp. $(-b', a')$]. Quindi la condizione di ortogonalità è

$$(-b)(-b') + aa' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad aa' + bb' = 0 \tag{4.33}$$

4.4 Orientazioni, questioni angolari e distanze.

Nel precedente paragrafo si è discussa la nozione di ortogonalità tra sottostai. In alcuni casi, sarà possibile fornire anche una nozione di angolo tra sottospazi.

a) Orientazioni.

Ricordiamo che (cfr. [1], cap. 14, par. 7) una *orientazione* in uno spazio vettoriale di dimensione finita è una classe di equivalenza di riferimenti, ove due riferimenti siano detti equivalenti (o *concordi*) se la matrice del cambio di riferimento ha determinante positivo. Due riferimenti non equivalenti sono detti *discordi.* Poichè esistono due sole distinte orientazioni su ogni spazio vettoriale V non nullo di dimensione finita su $\mathbb{R}$, esistono quindi due distinte orientazioni su ogni spazio affine reale di dimensione finita, che non sia un punto, secondo la definizione seguente.

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine di dimensione finita n su $\mathbb{R}$.

Definizione 4.4.1. Si dice che è data una *orientazione in* $\mathbb{E}$ se è data una orientazione sullo spazio vettoriale $\mathbf{V}(\mathbb{E})$.

Esempio 4.4.2. **Orientazioni su una retta**. Per assegnare una orientazione su una retta basta dare un vettore $\mathbf{v}$ non nullo parallelo alla retta, perché questo è un riferimento della giacitura, e quindi determina una classe di riferimenti concordi.

Un vettore $\mathbf{w}$ parallelo alla retta e non nullo determina la stessa orientazione di $\mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$, con $\lambda > 0$: si dice allora che $\mathbf{w}$ è *concorde alla orientazione* della retta.

Ovviamente $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ determinano orientazioni opposte se $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ con $\lambda < 0$. In particolare in uno spazio euclideo vi sono solo due versori paralleli alla retta, uno opposto dell'altro: essi individuano le due orientazioni opposte della retta.

Definizione 4.4.3. Se φ è una affinità di $\mathbb{E}$ in sè si dice che φ *conserva l'orientazione* se l'applicazione lineare associata φ_l conserva l'orientazione di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$.

Ciò accade se e solo se, data l'equazione matriciale

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{4.34}$$

di φ in un fissato riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbb{A}$, la matrice quadrata $\mathbf{A}$ d'ordine n che compare in essa ha determinante positivo (cfr. [1], cap. 14, par. 7, prop. 14.34).

Definizione 4.4.4. Le affinità di $\mathbb{E}$ in sè che conservano l'orientazione costituiscono un sottogruppo del gruppo affine, che denoteremo col simbolo

$$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{E})$$

e chiameremo *affinità dirette*.

b) Angolo tra due rette orientate.

Siano $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione n e $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n))$ un riferimento cartesiano monometrico ortonormale in $\mathbb{E}$. Data una retta S di $\mathbb{E}$, sia fissata una orientazione di S mediante la scelta di un versore $\mathbf{v}$ parallelo a S.

Definizione 4.4.5. Le componenti $(v_1, \ldots, v_n)$ del versore $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}$, si dicono *coseni direttori della retta* S.

Il motivo di tale denominazione risiede nel fatto che v_i è il coseno dell'angolo formato da $\mathbf{v}$ con il versore $\mathbf{e}_i$.

Definizione 4.4.6. Date due rette orientate S e S', si dice *angolo formato dalle due rette* l'angolo formato dai due versori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ paralleli e concordi a S e S'. Tale angolo si denota col simbolo

$$S\hat{S}'$$

e dipende dalle orientazioni scelte su S e S'.

E' facile verificare che, se si cambia l'orientazione su entrambe le rette, l'angolo rimane lo stesso, mentre l'angolo cambia di π se si cambia l'orientazione su una sola delle due rette.

Osservazione 4.4.7. Se S e S' hanno coseni direttori $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(w_1, \ldots, w_n)$ rispettivamente, si ha

$$\begin{aligned} cos\, S\hat{S}' &= v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n \\ sen\, S\hat{S}' &= \sqrt{1 - (v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)^2}\,. \end{aligned} \tag{4.35}$$

c) Angolo tra iperpiani e tra rette e iperpiani.
Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione n e $\mathcal{R}$ sia un riferimento cartesiano monometrico ortogonale in $\mathbb{E}$. Siano S e S' iperpiani di $\mathbb{E}$ e siano assegnati un vettore non nullo $\mathbf{v}$ ortogonale a S e uno non nullo $\mathbf{w}$ ortogonale a S'. Notiamo che tanto $\mathbf{v}$ che $\mathbf{w}$ sono definiti solo a meno del segno.

Definizione 4.4.8. Angolo tra iperpiani Si definisce *angolo tra i due iperpiani* S e S' l'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, che è definito solo a meno di multipli di π.

L'angolo tra iperpiani è dunque l'angolo tra le rispettive normali. Come eccezione rispetto alla nozione già introdotta di ortogonalità tra sottospazi di uno spazio euclideo, la nozione introdotta di 'angolo' tra iperpiani permette di introdurre anche la nozione di ortogonalià tra iperpiani, secondo la definizione seguente.

Definizione 4.4.9. Due iperpiani S e S' si dicono *ortogonali* se l'angolo da essi formato vale $\pi/2$.

Osservazione 4.4.10. Se S e S' hanno, rispettivamente, equazioni

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a = 0, \\ b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n + b = 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

la condizione di ortogonalità tra S e S' è data da

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = 0 \tag{4.37}$$

mentre il coseno dell'angolo tra S e S' è dato da

$$cos\,\hat{SS'} = \frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}} \tag{4.38}$$

Infatti $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ sono le componenti di vettori ortogonali rispettivamente a S e S'.

Definizione 4.4.11. Angolo retta-iperpiano Se S è un iperpiano e S' è invece una retta, l'angolo tra S e S', sempre definito a meno di multipli di π, si definisce come il complementare a $\pi/2$ dell'angolo convesso di S' con un vettore non nullo ortogonale a S.

d) Proiezione parallela di un vettore lungo una direzione. Sia $\mathbf{w}$ un vettore e sia $S = Q + < \mathbf{v} >$ una retta. Il vettore

$$\mathbf{w}_S = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}\,\mathbf{v} \tag{4.39}$$

è parallelo a S viene detto *proiezione parallela* di $\mathbf{w}$ lungo $\mathbf{v}$ o lungo S. Il vettore $\mathbf{w}_S$ gode della proprietà che

$$\mathbf{w}_\perp = \mathbf{w} - \mathbf{w}_S = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}\,\mathbf{v} \tag{4.40}$$

è ortogonale a S, ed è chiamato *proiezione ortogonale* di $\mathbf{w}$ lungo $\mathbf{v}$ o lungo S. Il vettore $\mathbf{w}_S$ è l'unico vettore parallelo ad S con tale proprietà. Infatti, ogni vettore parallelo a S è della forma $k\mathbf{v}$; la condizione che $\mathbf{w} - k\mathbf{v}$ sia ortogonale a $\mathbf{v}$ comporta che $0 = \mathbf{v} \times [\mathbf{w} - k\mathbf{v}] = \mathbf{v} \times \mathbf{w} - k\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ e dunque $k = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}$.

Si ricava la decomposizione ortogonale

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_S + \mathbf{w}_\perp. \tag{4.41}$$

e) Distanza di un punto da un sottospazio.

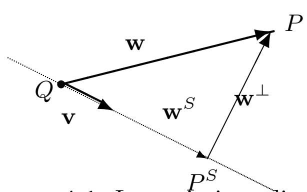

Figura 4.1. La proiezione di un vettore

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione n, dotato di un riferimento cartesiano monometrico ortonormale $\mathcal{R}$. Siano S un sottospazio di dimensione $m < n$ e P un punto di $\mathbb{E}$. Esiste un unico sottospazio S' di dimensione $n - m$ di $\mathbb{E}$

ortogonale a S e passante per P. Sia P^S l'unico punto di intersezione di S' con S (cfr. proposizione 4.3.1): tale punto è detto *proiezione ortogonale* di P su S ed è l'unico punto di S tale che $\mathbf{PP^S}$ sia ortogonale a S.

La distanza $d(P, P^S)$ prende il nome di *distanza* di P da S e si denota col simbolo $d(P, S)$. Tale definizione è giustificata dal fatto che la proiezione ortogonale P^S è il punto di S di minima distanza da P.

Proposizione 4.4.12. *Per ogni punto $X \neq P^S$ in S, si ha $d(X, P) > d(P, S)$.*

Dimostrazione. Sia ha $\mathbf{PX} = \mathbf{P^S X} + \mathbf{PP^S}$. Allora

$$\begin{aligned} d(X, P)^2 &= \mathbf{PX} \times \mathbf{PX} = \\ &= \mathbf{P^S X} \times \mathbf{P^S X} + 2\,\mathbf{P^S X} \times \mathbf{PP^S} + \mathbf{PP^S} \times \mathbf{PP^S} = \\ &= d(X, P^S)^2 + d(P, P^S)^2 > d(P, S)^2 \end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{P^S X} \times \mathbf{PP^S} = 0$ perché $\mathbf{PP^S}$ è ortogonale a S, $d(X, P^S) > 0$ perché $X \neq P^S$, e $d(P, P^S) = d(P, S)$ per definizione. □

Calcoleremo ora $d(P, S)$ in due casi particolari, quando S è un iperpiano oppure una retta.

Esempio 4.4.13. **Distanza di un punto da un iperpiano**.

Proposizione 4.4.14. *Sia*

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a = 0 \tag{4.42}$$

un'equazione di un iperpiano S in $\mathcal{R}$ e sia P il punto di coordinate cartesiane $(p_1, \ldots, p_n)$. Allora

$$d(P, S) = \frac{|a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}. \tag{4.43}$$

Dimostrazione. Le equazioni parametriche della retta S' ortogonale a S per il punto P sono date da

$$x_i = p_i + t a_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t \in \mathbf{R} \tag{4.44}$$

Le coordinate $(p'_1, \ldots, p'_n)$ della proiezione ortogonale $P^S = S \cap S'$ corrispondono al valore t_0 del parametro t che sia radice dell'equazione

$$\begin{aligned} & a_1(p_1 + t a_1) + \ldots + a_n(p_n + t a_n) + a = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & (a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n + a) + t(a_1^2 + \ldots + a_n^2) = 0 \end{aligned} \tag{4.45}$$

ossia a

$$t_0 = -\frac{a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n + a}{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \tag{4.46}$$

Quindi

$$\begin{aligned} d(P, S) = d(P, P^S) &= \sqrt{(p_1 - p'_1)^2 + \ldots + (p_n - p'_n)^2} \\ &= \sqrt{(t_0 a_1)^2 + \ldots + (t_0 a_n)^2} = |t_0| \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \\ &= \frac{|a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} \end{aligned} \tag{4.47}$$

□

Esempio 4.4.15. **Distanza di un punto da una retta.** Un altro caso interessante è quello della distanza tra un punto $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ e una retta S. Supponiamo S passi per il punto $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ed abbia vettore direttore $\mathbf{v}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$; le equazioni parametriche di S sono quindi

$$x_1 = q_1 + \lambda_1 t,\ x_2 = q_2 + \lambda_2 t, \dots,\ x_n = q_n + \lambda_n t \tag{4.48}$$

Il punto P^S è il punto su S tale che $\mathbf{QP^S}$ coincide con la proiezione parallela di $\mathbf{QP}$ lungo $\mathbf{v}$. Le coordinate $P^S(h_1, h_2, \dots, h_n)$ si ottengono dalle equazioni parametriche di S per $t_0 = \frac{\mathbf{QP}\times\mathbf{v}}{\mathbf{v}\times\mathbf{v}}$:

$$h_1 = q_1 + \lambda_1 \frac{\mathbf{QP}\times\mathbf{v}}{\mathbf{v}\times\mathbf{v}},\ h_2 = q_2 + \lambda_2 \frac{\mathbf{QP}\times\mathbf{v}}{\mathbf{v}\times\mathbf{v}}, \dots,\ h_n = q_n + \lambda_n \frac{\mathbf{QP}\times\mathbf{v}}{\mathbf{v}\times\mathbf{v}} \tag{4.49}$$

mentre la distanza tra P e S è la lunghezza della proiezione ortogonale

$$\mathbf{PP^S} = \mathbf{QP}_\perp = \mathbf{QP} - \mathbf{QP^S} = \mathbf{QP} - \frac{\mathbf{QP}\times\mathbf{v}}{\mathbf{v}\times\mathbf{v}}\mathbf{v}.$$

Un altro modo per ottenere tale risultato è quello di considerare l'iperpiano S' per $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ortogonale ad S, che ha equazione

$$\lambda_1(x_1 - p_1) + \lambda_2(x_2 - p_2) + \ldots + \lambda_n(x_n - p_n) = 0\,. \tag{4.50}$$

Le coordinate di $P^S = S \cap S'$ si ottengono per $t = t_0$ soluzione dell'equazione

$$\lambda_1(q_1 + \lambda_1 t - p_1) + \lambda_2(q_2 + \lambda_2 t - p_2) + \ldots + \lambda_n(q_n + \lambda_n t - p_n) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2)t + \lambda_1(q_1 - p_1) + \lambda_2(q_2 - p_2) + \ldots + \lambda_n(q_n - p_n) = 0$$

ossia per

$$t_0 = -\frac{\lambda_1(q_1 - p_1) + \lambda_2(q_2 - p_2) + \ldots + \lambda_n(q_n - p_n)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}\ . \tag{4.51}$$

Dunque ritroviamo la formula

$$\begin{aligned} d(P,S) \ &= \ d(P,P^S) = \big\{[q_1 - p_1 + t_0\lambda_1]^2 + [q_2 - p_2 + t_0\lambda_2]^2 + \ldots \\ &\quad \ldots + [q_n - p_n + t_0\lambda_n]^2 \end{aligned}$$

Esempio numerico: $P(3, 2, 1)$ ed S ha equazioni parametriche

$$x = 2 + t,\ y = -4 + 3t,\ z = 1 - t\ .$$

Posti $Q(2, -4, 1)$ e $\mathbf{v}(1, 3, -1)$, la proiezione parallela lungo S di $\mathbf{QP}(1, 6, 0)$ è data da $\frac{1+18}{1+9+1}(1, 3, -1) = \frac{19}{11}(1, 3, -1)$, e quindi

$$P^S(2 + \frac{19}{11}, -4 + \frac{19}{11}3, 1 - \frac{19}{11}) = P^S(\frac{41}{11}, -\frac{25}{11}, -\frac{8}{11}).$$

Si ricava la distanza cercata

$$d(P,S) = d(P,P^S) = \sqrt{\left(3 - \frac{41}{11}\right)^2 + \left(2 + \frac{25}{11}\right)^2 + \left(1 + \frac{8}{11}\right)^2}.$$

Analogo risultato si sarebbe trovato considerando il piano S' per P ortogonale ad S, che ha equazione

$$(x-3)+3(y-2)-(z-1)=x+3y-z-8=0$$

Le coordinate di $P^S = S \cap S'$ si ottengono per t soluzione della equazione

$$(2+t)+3(-4+3t)-(1-t)-8=11\,t-19=0,$$

ossia per $t_0 = 19/11$.

f) Distanza tra sottospazi
Più in generale, la distanza $d(S, S')$ tra due sottospazi S e S' di uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ è la minima distanza tra un punto di S e un punto di S', quando tale minimo esiste. In particolare, se $S \cap S' \neq \emptyset$, allora $d(S, S') = 0$. Inoltre, se $P \in S$ e $P' \in S'$ sono punti di minima distanza, la retta per P e P' è ortogonale sia a S che a S'.

4.5 Lo spazio euclideo di dimensione 3 e il prodotto vettoriale

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione 3, e sia $\mathcal{R} = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento monometrico ortonormale. Nello spazio $\mathbb{E}$ verrà considerata l'orientazione indotta dal riferimento fissato.

Assegnati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $\mathbb{E}$, si vuole associare loro un terzo vettore, detto *prodotto esterno* (o *vettoriale*) di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e denotato con $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, con le seguenti proprietà:

a) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti;

b) se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti:

- il vettore $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ è ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$, cioè $(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) \perp \mathbf{v}$ e $(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) \perp \mathbf{w}$;
- la lunghezza di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è uguale all'area del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, cioè $|(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})| = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\, sin \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$;
- il riferimento $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è equiorientato a $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

La definizione di prodotto esterno dipende quindi dall'orientazione scelta, a meno del segno.

Le componenti di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ possono facilmente essere individuate a partire dalle componenti $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w}(w_1, w_2, w_3)$, pensando che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ si ricava come determinante formale della matrice:

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (v_2w_3-v_3w_2)\,\mathbf{i}-(v_1w_3-v_3w_1)\,\mathbf{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\,\mathbf{k}$$

Infatti, detto $\mathbf{u}$ il vettore così definito, notiamo che $\mathbf{u}$ è sicuramente ortogonale a $\mathbf{v}$ e a $\mathbf{w}$, e si annulla se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti. Inoltre, se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, il riferimento $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ è equiorientato a $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, perchè la matrice dell'identità su $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ (rispetto al riferimento $(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})$ nel dominio e $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ nel codominio) è

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & (v_2w_3 - v_3w_2) \\ v_2 & w_2 & -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ v_3 & w_3 & (v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante secondo Laplace rispetto alla ultima colonna, si vede che il determinante di tale matrice è la norma del vettore non nullo u (e dunque è positivo). Deduciamo che tale matrice individua una affinità diretta. Infine, la lunghezza di $\mathbf{u}$ è corretta, come si vede applicando la formula (4.18) e ricordando che il riferimento è ortonormale.

Esempio 4.5.1. L'area del triangolo di vertici $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ si ottiene considerando i vettori

$$\mathbf{v} = \mathbf{AB}(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3), \qquad \mathbf{w} = \mathbf{AC}(c_1-a_1, c_2-a_2, c_3-a_3).$$

Poichè la lunghezza di $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ è uguale all'area del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e l'area del triangolo di vertici A, B, C ne è la metà:

$$Area\,triangolo = \frac{1}{2}|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}|$$

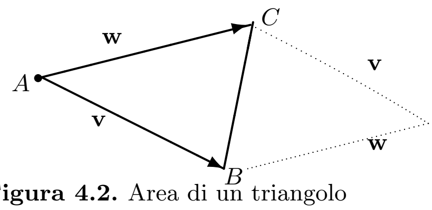

Figura 4.2. Area di un triangolo

L'applicazione $\mathbf{V}(\mathbb{E})\times\mathbf{V}(\mathbb{E}) \to \mathbf{V}(\mathbb{E})$ definita da $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ è bilineare alternante, cioè:

- $(k\mathbf{v} + h\mathbf{v}')\wedge\mathbf{w} = k\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} + h\mathbf{v}'\wedge\mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{v},\mathbf{v}',\mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$, $k,h \in \mathbb{R}$;
- $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = -\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$.

Definizione 4.5.2. Dati tre vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$, si definisce loro *prodotto misto* il numero reale $(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})\times\mathbf{u}$.

Nel riferimento ortonormale, il prodotto misto di $\mathbf{v}(v_1,v_2,v_3)$, $\mathbf{w}(w_1,w_2,w_3)$ e $\mathbf{u}(u_1,u_2,u_3)$ si ricava come determinante della matrice:

$$(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})\times\mathbf{u} = det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix},$$

come si vede sviluppando il determinante rispetto all'ultima riga. In particolare, il prodotto misto $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \times \mathbf{u}$ è nullo se e solo se i vettori $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $\mathbf{u}$ sono complanari (cioè linearmente dipendenti). Più in generale, il valore assoluto del prodotto misto di $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$ è il *volume* del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$. Il prodotto misto può essere interpretato come volume con segno del parallelepipedo.

Esempio 4.5.3. Sia $\mathcal{P}$ la *piramide* (o tetraedro) di vertici $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$. Il volume di $\mathcal{P}$ si ottiene considerando i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3), \\ \mathbf{w} &= \mathbf{AC}(c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{AD}(d_1 - a_1, d_2 - a_2, d_3 - a_3). \end{aligned}$$

Il volume di $\mathcal{P}$ è pari ad un terzo del volume del prisma di base e altezza uguale a quelle della piramide. In particolare, il volume della piramide è un sesto del volume del parallelepipedo di lati $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$, e il volume di tale parallelepipedo è dato dal valore assoluto del prodotto misto di $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} Area\, piramide\, \mathcal{P} = \frac{1}{6}|(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \times \mathbf{u}| &= \frac{1}{6}|det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{pmatrix} | \\ &= \frac{1}{6}|det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{pmatrix} | \end{aligned}$$

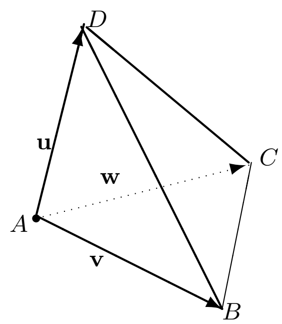

Figura 4.3. Volume di una piramide

Il prodotto vettoriale può essere utilizzato anche per calcolare la distanza tra due rette parallele o tra due rette sghembe.

4.6 Isometrie e cambiamenti di riferimento.

Siano $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ spazi euclidei.

Definizione 4.6.1. Una affinità $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ si dice una *congruenza* o *isometria* se l'applicazione lineare associata $\varphi_l : \mathbf{V}(\mathbb{E}) \to \mathbf{V}(\mathbb{E}')$ è un omomorfismo metrico (cfr. [1], cap. 18, par. 3) ossia se per ogni coppia $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{V}(\mathbb{E}) \times \mathbf{V}(\mathbb{E})$ si ha

$$\varphi_l(\mathbf{v}) \times \varphi_l(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \tag{4.52}$$

Dal corollario (18.12) di [1] segue che φ_l è una applicazione iniettiva e dunque ogni congruenza è iniettiva. In particolare una congruenza tra spazi della stessa dimensione è un isomorfismo. Per definizione, inoltre, le congruenze conservano il coseno degli angoli e le distanze. Ciò giustifica il nome di isometrie dato alle congruenze.

Definizione 4.6.2. Se $\mathbb{E}$ è uno spazio euclideo di dimensione n, le congruenze di $\mathbb{E}$ in sè formano un sottogruppo, che denoteremo col simbolo $\mathcal{I}s\,(\mathbb{E})$, del gruppo affine Aff $(\mathbb{E})$. Le isometrie che sono pure affinità dirette si dicono *movimenti dello spazio* $\mathbb{E}$ e formano un sottogruppo $Mov(\mathbb{E})$ di $\mathcal{I}s\,(\mathbb{E})$.

Osservazione 4.6.3. Sia $\mathcal{R}$ un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di $\mathbb{E}$ e consideriamo l'equazione matriciale

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{4.53}$$

di una affinità φ di $\mathbb{E}$ in sè in $\mathcal{R} = (O, R)$. La matrice $\mathbf{A}$ non è altro che la matrice di φ_l nel riferimento ortonormale R di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$. Dunque φ appartiene a $\mathcal{I}s\,(\mathbb{E})$ se e solo se $\mathbf{A}$ appartiene al gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ e φ appartiene a $Mov(\mathbb{E})$ se e solo se $\mathbf{A}$ appartiene al gruppo ortogonale speciale $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ (cfr. [1], cap. 21, par. 3).

In particolare, se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$ sono riferimenti cartesiani monometrici ortogonali di $\mathbb{E}$, le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono del tipo (4.53), con $\mathbf{A}$ matrice ortogonale, che risulta diretta o inversa a seconda che R e R' siano concordi o discordi.

Esempio 4.6.4. **Isometrie di una retta.** Sia $\mathbb{A}$ una retta euclidea e ne sia φ una affinità. Fissato un riferimento cartesiano monometrico $\mathcal{R} = (O, \mathbf{v})$, l'equazione di φ in $\mathcal{R}$ si scrive come $y = ax + c$. L'affinità φ è una isometria se e solo se $a = \pm 1$, ed è un movimento se e solo se $a = 1$. Dunque i movimenti di una retta euclidea sono tutte e sole le traslazioni. Invece le congruenze che non sono movimenti hanno equazione del tipo $y = -x + c$. Queste, al contrario delle traslazioni, hanno uno, e un solo, punto fisso, precisamente il punto avente in $\mathcal{R}$ coordinata $x = c/2$. Se si assume questo punto come origine del riferimento, la congruenza viene ad avere equazione $y = -x$, ossia è la simmetria rispetto all'unico punto fisso.

Esempio 4.6.5. **Simmetria ortogonale o riflessione rispetto ad un iperpiano.** Siano $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo e π un iperpiano fissato. Per ogni punto P, si consideri la retta r_P per P e ortogonale a π. Detto H_P il punto di intersezione tra π e r_P, resta univocamente determinato il punto $P' \in r_P$ tale $\mathbf{H_P P} = -\mathbf{H_P P'}$. Il punto P' è detto *simmetrico ortogonale* di P rispetto all'iperpiano π. La posizione $\varphi(P) = P'$ definisce una affinità di $\mathbb{A}$ in sè, detta *simmetria ortogonale* (o *riflessione*) rispetto all'iperpiano π, rispetto alla quale tutti i punti di π sono fissi. L'iperpiano π è detto *iperpiano di simmetria* per φ; se π è una retta (e quindi lo spazio euclideo ha dimensione 2), viene detto anche *asse di simmetria*.

4.7 Isometrie di un piano euclideo

Definizione 4.7.1. Sia φ una isometria del piano euclideo $\mathbb{E}$ in sè che fissa un punto O di $\mathbb{E}$, ossia tale che $\varphi(O) = O$. L'isometria φ si dice una *rotazione* se è un movimento, una *riflessione o ribaltamento* se non è un movimento ma solo una congruenza.

Vediamo il motivo di questa terminologia.

Scegliamo un riferimento $\mathcal{R} = (O, R)$ cartesiano monometrico ortogonale di $\mathbb{E}$ di origine O e scriviamo l'equazione matriciale (4.53) di φ in $\mathcal{R}$ che ora assume la forma $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, dove $\mathbf{A}$ è una matrice ortogonale di ordine 2. Si dimostra facilmente (cf. [1], esempio 21.9) che la matrice $\mathbf{A}$, se è diretta, assume la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

con $\alpha \in [0, 2\pi)$ che si dice *angolo della rotazione* φ. Indicati con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ i vettori del riferimento R, se la matrice $\mathbf{A}$ è diretta, risulta che α è proprio l'angolo formato da $\mathbf{e}_1$ e $\varphi_l(\mathbf{e}_1) = cos\,\alpha\,\mathbf{e}_1 + sen\,\alpha\,\mathbf{e}_2$. Lo stesso vale per l'angolo formato da $\mathbf{e}_2$ e $\varphi_l(\mathbf{e}_2) = -sen\,\alpha\,\mathbf{e}_1 + cos\,\alpha\,\mathbf{e}_2$. Più in generale, per ogni punto P di $\mathbb{A}$, i vettori $\mathbf{OP}$ e $\mathbf{O}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(P)}$ formano un angolo α.
Se invece $\mathbf{A}$ è inversa, assume allora la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & -cos\,\alpha \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

con $\alpha \in [0, 2\pi)$; si mostra facilmente che i punti della retta

$$r : x = t\,(cos\alpha + 1), y = t\,sen\,\alpha$$

sono fissi per φ, mentre ogni punto della retta $x = -t\,sen\,\alpha, y = t\,(cos\alpha + 1)$, passante per l'origine e ortogonale a r, verifica la relazione $\varphi(x, y) = (-x, -y)$. La φ è quindi una riflessione (o simmetria ortogonale) rispetto all'asse r (cfr. [1], cap. 18, es. 18.7 (e)). Per una opportuna scelta del riferimento monometrico ortogonale R (cioè utilizzando un riferimento con la stessa orientazione di R e avente come primo vettore del riferimento un versore della retta fissa), la matrice $\mathbf{A}$ assume la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

ossia le equazioni di φ in un opportuno riferimento cartesiano monometrico ortogonale sono del tipo

$$x' = x, y' = -y\,. \tag{4.57}$$

In generale una congruenza φ di $\mathbb{A}$ in sè risulta composta di una traslazione e di una rotazione, oppure di una traslazione e di una riflessione ortogonale, a seconda che sia diretta o inversa.

Si noti che in generale, se $\mathbb{E}$ è uno spazio euclideo di dimensione n e φ è una congruenza che fissa un punto O, il corollario (21.41) di [1] chiarisce la struttura di φ, che risulta composta di un certo numero di rotazioni in piano mutuamente ortogonali e un certo numero di simmetrie ortogonali rispetto a iperpiani ortogonali ai suddetti piani.

Definizione 4.7.2. Una *glissoriflessione* è una isometria φ del piano euclideo ottenuta componendo la riflessione avente per asse una retta r e una traslazione non identica lungo un vettore parallelo ad r.

Una glissoriflessione è dunque una isometria inversa priva di punti fissi.

La discussione precedente mostra la prima asserzione del seguente Teorema che fornisce una classificazione delle isometrie piane:

Teorema 4.7.3. (Chasles) *Una isometria del piano euclideo che fissa almeno un punto, è una rotazione se è diretta, mentre è una riflessione se è inversa.*
Una isometria del piano euclideo che non fissa nessun punto, è una traslazione se è diretta, mentre è una glissoriflessione se è inversa.

Concludiamo con il seguente teorema classico:

Teorema 4.7.4. *Sia $\mathbb{E}$ il piano euclideo. Ogni sottogruppo finito non banale di $\mathcal{I}s(\mathbb{E})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, per qualche $n \geq 3$, oppure a uno dei gruppi diedrali D_{2n}, $n \geq 1$.*

Entrambi i teoremi verranno dimostrati nei Complementi.

4.8 Isometrie in uno spazio euclideo di dimensione 3

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo di dimensione 3 e sia $\mathcal{R} = (O, R = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3])$ un riferimento cartesiano monometrico ortogonale per $\mathbb{E}$.

Definizione 4.8.1. Si dice *rotazione di centro O di angolo α intorno al vettore* $\mathbf{v}_1$ l'affinità $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ le cui equazioni nel riferimento $\mathcal{R}$ sono date da:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \qquad \text{ove } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

I punti della retta passante per O e parallela a $\mathbf{v}_1$ sono tutti e soli i punti fissi per φ, se α non è un multiplo intero di 2π. La retta dei punti fissi viene detta anche *asse della rotazione*. Si osservi che la matrice $\mathbf{A}$ è ortogonale speciale, e dunque φ è un movimento di $\mathbb{E}$.

Più in generale, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, una affinità $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ si dice *rotazione di centro O di angolo α intorno al vettore* $\mathbf{v}$ se, comunque si completi $\mathbf{v}$ ad una base ortogonale R' di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ con la stessa orientazione di R, le equazioni di φ in (O, R') sono come in (4.58). Questo equivale a dire che, se $\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ sono le equazioni di φ in $\mathcal{R}$, si ha

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_{RR'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{RR'}^{-1} \qquad \text{ove } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.59}$$

e le colonne di $\mathbf{M}_{RR'}$ sono formate dalle coordinate dei vettori di R' nel riferimento R. Si osservi che, di nuovo, la matrice $\mathbf{B}$ è ortogonale speciale. Fissato il riferimento, si può definire φ anche nel modo seguente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{v} + (\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{x}) \cos\alpha + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \sin\alpha. \tag{4.60}$$

Per esempio, se il vettore $\mathbf{v}$ è parallelo a $(1, 1, 1)$, allora la formula per φ diventa:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cos\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ y - x \end{pmatrix} + \frac{1 - \cos\alpha}{3} \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

E' possibile dimostrare, viceversa, che le rotazioni di centro O attorno ad un vettore di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ sono tutte e sole le isometrie che hanno in $\mathcal{R}$ equazioni del tipo $\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ con $\mathbf{B}$ matrice ortogonale speciale:

Proposizione 4.8.2. *Sia $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ una isometria che ha in $\mathcal{R}$ equazioni* $\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ *con* $\mathbf{B}$ *matrice ortogonale speciale. Allora esistono un angolo α e un versore* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ *tali che φ è la rotazione di centro O di angolo α intorno al vettore* $\mathbf{v}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{A}$ la matrice ortogonale diretta associata a φ_l in un riferimento monometrico ortogonale. L'applicazione φ_l porta versori in versori, quindi gli autovalori di $\mathbf{A}$ devono essere numeri (reali o complessi) di modulo 1. Siccome $\mathbf{A}$ è di ordine 3×3, il polinomio caratteristico $p(t)$ di $\mathbf{A}$ è un polinomio di terzo grado in t e dunque ammette sicuramente almeno una radice reale $\lambda = \pm 1$. Affermiamo che $\lambda = 1$ è un autovalore di $\mathbf{A}$. Da ciò seguirà che un autovettore $\mathbf{v}$ relativo all'autovalore 1 definisce un asse fisso per φ. L'isometria indotta sul piano ortogonale a $\mathbf{v}$ risulta necessariamente essere una congruenza diretta, e dunque la rotazione di un angolo α, come si voleva. Supponiamo dunque per assurdo che -1 sia l'unico autovalore reale di $\mathbf{A}$. Indichiamo gli altri due autovalori di $\mathbf{A}$, che sono numeri complessi coniugati, con λ e $\bar{\lambda}$. Allora $\lambda\bar{\lambda} = \|\lambda\|^2 = 1$, come abbiamo già osservato, e il determinante di $\mathbf{A}$ è

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)\lambda\bar{\lambda} = (-1)\|\lambda\|^2 = -1$$

contraddicendo l'ipotesi che $\mathbf{A}$ sia ortogonale diretta. □

Esempio 4.8.3. Denotiamo con $\mathbb{E}^3$ lo spazio affine numerico $\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$, con prodotto scalare euclideo e riferimento standard $\mathcal{R}$. Si vogliono determinare le equazioni della rotazione φ di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La rotazione φ può essere descritta come la composizione

$$\varphi = T_P \circ \varphi' \circ T_{-P} \tag{4.61}$$

ove con T_P (risp., T_{-P}) si indichi la traslazione di passo $P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (risp., $-P$), e con φ' la rotazione di $\pi/3$ attorno al versore $\mathbf{v}$. (La stessa descrizione vale per una qualunque scelta di P in l.)

Completo $\mathbf{v}$ ad una base ortonormale positivamente orientata R' di $M(3,1,\mathbb{R})$; ad esempio, $R' = [\mathbf{v}, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$. Risulta:

$$M_{R'}(\varphi'_l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\pi/3 & -sen\,\pi/3 \\ 0 & sen\,\pi/3 & cos\,\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{M}_R(\varphi'_l) = \mathbf{M}_{RR'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{RR'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Si ricavano le equazioni di φ in $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - P) + P \tag{4.62}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

Fissato il riferimento $\mathcal{R}$, le rotazioni attorno agli assi coordinati permettono di descrivere la struttura di tutte le rotazioni di centro O dello spazio euclideo di dimensione 3, grazie ad un fondamentale teorema di Eulero, detto *dei tre angoli*. Il teorema di Eulero mostra che ogni trasformazione ortogonale diretta che fissa il punto O è la composizione di tre rotazioni, determinate dai tre angoli ψ, ϕ e θ:

Teorema 4.8.4. (Eulero) *Ogni rotazione φ di centro O è della forma*

$$\varphi = R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi$$

dove ϕ, θ e ψ sono angoli, detti di Eulero*, tali che*

$$0 \leq \psi, \phi < 2\pi, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

e con R^i_α si denoti la rotazione di centro O e angolo α attorno all'i-simo versore $\mathbf{v_i}$ *del riferimento. In particolare gli angoli ψ, θ e ϕ sono univocamente determinati da φ.*

Dimostrazione. La rotazione φ è una isometria e preserva l'orientazione, ed è dunque completamente determinata dalle immagini dei vettori $\mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{v_3}$. Osserviamo che sono univocamente individuati gli angoli $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$ tali che

$$\varphi(\mathbf{v}_3) = R^3_\phi \circ R^1_\theta(\mathbf{v}_3) :$$

θ e ϕ sono detti rispettivamente *latitudine* e *longitudine* di $\varphi(\mathbf{v}_3)$. Posto ora $R' = R^3_\phi \circ R^1_\theta$, si ha che $R'(\mathbf{v}_1)$ e $R(\mathbf{v}_1)$ sono vettori che giacciono nel piano perpendicolare a $R(\mathbf{v}_3)$ e formano un angolo ψ, con $0 \leq \psi < 2\pi$; ne segue che

$$R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi(\mathbf{v}_1) = R(\mathbf{v}_1).$$

Poiché la rotazione R^3_ψ lascia fisso $\mathbf{v}_3$, segue la tesi. □

La classificazione delle isometrie dello spazio euclideo di dimensione 3 comprende, oltre a rotazioni, riflessioni e traslazioni, anche altri tre tipi di isometria: le glissoriflessioni, le glissorotazioni e le riflessioni rotatorie.

Definizione 4.8.5. Una *glissoriflessione* è la composizione di una riflessione con una traslazione non identica in una direzione parallela al piano di simmetria della riflessione.

Una *glissorotazione* è la composizione di una rotazione con una traslazione in una direzione parallela all'asse di rotazione.

Una *riflessione rotatoria* è la composizione di una rotazione con la riflessione rispetto a un piano perpendicolare all'asse di rotazione.

Esercizi svolti

IL PRODOTTO SCALARE

Problema 4.1. *a) Dimostra che* $(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2$.
b) Dimostra che $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \frac{1}{4}[|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}-\mathbf{w}|^2]$.

Soluzione. a) Per la bilinearità e la simmetria del prodotto scalare,

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = \mathbf{v}\times\mathbf{v}+\mathbf{w}\times\mathbf{v}-\mathbf{v}\times\mathbf{w}-\mathbf{w}\times\mathbf{w} = \mathbf{v}\times\mathbf{v}-\mathbf{w}\times\mathbf{w}.$$

b) Si sfruttano la bilinearità e la simmetria del prodotto scalare.

Problema 4.2. *I vettori* $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}$ *di lunghezza* $|\mathbf{v}| = 4$, $|\mathbf{w}| = 5$, $|\mathbf{u}| = 3$ *rispettivamente, soddisfano alla condizione* $\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{u} = 0$. *Determina* $\mathbf{v}\times\mathbf{w}+\mathbf{w}\times\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Soluzione. Dalla relazione di dipendenza lineare si ricava che $\mathbf{w} = -\mathbf{v}-\mathbf{u}$ e

$$\begin{aligned} 25 = \mathbf{w}\times\mathbf{w} &= (-\mathbf{v}-\mathbf{u})\times(-\mathbf{v}-\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{v}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{u}+2\mathbf{v}\times\mathbf{u} \\ &= 16+9+2\mathbf{v}\times\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Si ricava che $\mathbf{v}\times\mathbf{u} = 0$ e che i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ sono tra loro ortogonali. Dunque,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\times\mathbf{w}+\mathbf{w}\times\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \mathbf{w}\times(\mathbf{v}+\mathbf{u})+\mathbf{u}\times\mathbf{v} \\ &= -\mathbf{w}\times\mathbf{w} = -25. \end{aligned}$$

Problema 4.3. *Determina i versori ortogonali a* $\mathbf{v} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{w} = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3k$.

Problema 4.4. *Dimostra che un quadrilatero piano è un rettangolo se e solo se le diagonali hanno uguale lunghezza.*

Soluzione. Ricorda la relazione $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \frac{1}{4}[|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}-\mathbf{w}|^2]$ mostrata nel'Esercizio svolto probtipo:4.aa1, e osserva che $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ sono le diagonali del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Imponendo l'uguaglianza delle diagonali, si ricava che $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = 0$, cioè che due lati consecutivi sono ortogonali e il parallelogramma è un rettangolo. Viceversa, lo stesso ragionamento mostra che la condizione di ortogonalià $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = 0$ implica che le diagonali hanno uguale lunghezza.

DISTANZE E RETTE IN $\mathbb{E}^3$

Si consideri uno spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ di dimensione 3, dotato di un riferimento monometrico ortonormale $\mathcal{R} = (O,(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}))$.

Problema 4.5. Distanza punto-piano *Sia* α *il piano di equazione cartesiana* $2x-3y+6z-3 = 0$ *nel sistema di riferimento fissato. Calcola la distanza del punto* $A(2,-1,2)$ *dal piano* α.

Soluzione. Il punto A non appartiene al piano α, perchè sostituendo le sue coordinate nell'equazione di α si trova $2 \cdot 2 - 3(-1) + 6 \cdot 2 - 3 = 16$. Applicando la Proposizione 4.4.14, si ricava che la distanza tra A e α è $D(A, \alpha) = \frac{|16|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{16}{\sqrt{49}} = \frac{16}{7}$.

Problema 4.6. Lunghezza del prodotto vettoriale *Siano assegnati i vettori* $\mathbf{v}(l, m, n)$ *e* $\mathbf{v}'(l', m', n')$. *Mostra che*

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'| = \sqrt{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|} \tag{4.64}$$

dove $\mathbf{A}$ *è la matrice*

$$\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

Soluzione. Si osservi che l'esercizio è un caso particolare della formula elencata subito prime della formula (4.17). Il prodotto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \times \mathbf{v} & \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{w} & \mathbf{w} \times \mathbf{w} \end{pmatrix}$ ha determinante

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) &= (\mathbf{v} \times \mathbf{v})(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2 \\ &= (l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2) - (ll' + mm' + nn')^2, \end{aligned}$$

mentre il prodotto esterno

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = (mn' - nm')\mathbf{i} - (ln' - nl')\mathbf{j} + (lm' - ml')\mathbf{k} \tag{4.66}$$

ha norma $(mn' - nm')^2 + (ln' - nl')^2 + (lm' - ml')^2$. Svolgendo i calcoli, si prova l'asserto.

Problema 4.7. Retta ortogonale e incidente due rette sghembe. *Siano* S *e* S' *due rette sghembe di uno spazio euclideo* $\mathbb{E}$ *di dimensione 3. Esiste una ed una sola retta* S'' *ortogonale ad* S *ed* S' *ed incidente sia* S *che* S'.

Soluzione. Siano $S = P + < \mathbf{v} >$ e $S' = P' + < \mathbf{v}' >$. Il complemento ortogonale $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >^{\perp}$ di $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$ ha dimensione 1; si indichi con $\mathbf{n}$ un generatore di $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >^{\perp}$. Si osservi che, ad esempio, è possibile prendere $\mathbf{n} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$. Detti α il piano per S e parallelo a $\mathbf{n}$ e α' il piano per S' e parallelo a $\mathbf{n}$, la retta S'' cercata è l'intersezione tra α e α'.

Problema 4.8. *In* $\mathbb{E}$, *siano* r *la retta di equazioni* $x - 3y + z = 0, 2x - 3z = -4$ *e* s *la retta di equazioni* $x - y + z = 0, x + 2y - z = 0$, *nel fissato riferimento. Mostra che le rette sono sghembe e determina equazioni cartesiane per la retta* l *ortogonale e incidente entrambe.*

Soluzione. La retta r ha come vettore direttore $\mathbf{v}(9,5,6)$, mentre la retta s ha come vettore direttore $\mathbf{v}'(-1,2,3)$: poichè tali vettori non sono proporzionali, le due rette non sono parallele. Considero il vettore $\mathbf{n} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$, che ha componenti $(3,-33,23)$. Osservo che la retta s passa per l'origine, mentre la retta r passa per il punto $(0,4/9,12/9)$ (ottenuto intersecando la retta con il piano $x=0$). Poichè $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}') \times \mathbf{OP} = -144/9 \neq 0$, le due rette non possono essere complanari, e dunque sono sghembe.

I piani nel fascio di piani per r hanno equazione della forma

$$\lambda(x-3y+z)+\mu(2x-3z+4)=0=(\lambda+2\mu)\,x-3\lambda\,y+(\lambda-3\mu)\,z+4\mu=0.$$

Un tale piano è parallelo a $\mathbf{n}$ se e solo se le componenti di $\mathbf{n}$ soddisfano l'equazione della giacitura del piano, cioè se e solo se

$$0=\lambda(3-3(-33)+23)+\mu(2\cdot 3-3(23))=125\lambda-63\mu.$$

Ciò accade, in particolare, se $(\lambda,\mu)=(63,125)$ (e ogni altra soluzione è proporzionale a questa), cioè per il piano $313\,x-189\,y-312\,z+500=0$ che fornisce una prima equazione per la retta cercata l. Una seconda equazione per l si trova in modo analogo, cercando, nel fascio di piani per s il piano parallelo a $\mathbf{n}$, che risulta avere equazione $145\,x+32\,y+27\,z=0$. La retta cercata l ha dunque equazioni cartesiane $313\,x-189\,y-312\,z+500=0, 145\,x+32\,y+27\,z=0$.

Problema 4.9. Distanza punto-retta *In* $\mathbb{E}$*, siano assegnati un punto* $B(b_1,b_2,b_3)$ *e la retta* r *passante per* $A(a_1,a_2,a_3)$ *e di vettore direttore* $\mathbf{v}(l,m,n)$*. Calcola la distanza tra* B *e* r*.*

Soluzione. Il punto B appartiene alla retta r se e solo se il vettore $\mathbf{AB}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$, cioè se e solo se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se ciò accade, il punto B ha distanza nulla dalla retta. Altrimenti, se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la lunghezza di tale vettore fornisce l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{v}$. Ma la distanza cercata è esattamente l'altezza di questo parallelogramma, e dunque

$$d(r,s)=\frac{|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

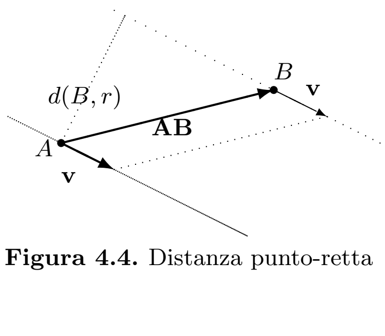

Figura 4.4. Distanza punto-retta

Problema 4.10. *Calcola la distanza tra il punto $B(1,-3,7)$ e la retta r di equazioni parametriche : $x = 2 - t, y = 4 + 3t, z = 2 - t$, con $t \in \mathbb{R}$.*

Soluzione. La retta r passa per il punto $A(2,4,2)$ e ha vettore direttore $\mathbf{v}(-1,3,-1)$. Il vettore $\mathbf{AB}(-1,-7,5)$ non è proporzionale al vettore direttore $\mathbf{v}$ e dunque B non appartiene a r e la distanza tra B e r è strettamente positiva. Il vettore $(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v})$ ha componenti $(-8,-6,-10)$ e lunghezza $\sqrt{200} = 2\sqrt{5}$, mentre $\mathbf{v}$ ha lunghezza $\sqrt{75}$. La distanza tra il punto B e la retta r è dunque $d(B,r) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{75}}$.

Problema 4.11. Distanza tra due rette parallele *In $\mathbb{E}$, siano assegnate la retta r passante per $A(a_1, a_2, a_3)$ e la retta s, parallela ad r e passante per il punto $B(b_1, b_2, b_3)$; sia $\mathbf{v}(l, m, n)$ un vettore direttore delle due rette. Calcola la distanza tra r e s.*

Soluzione. La retta r coincide con la retta s se e solo se il vettore $\mathbf{AB}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$, cioè se e solo se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se ciò accade, le due rette hanno distanza nulla tra loro. Altrimenti, se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la lunghezza di tale vettore fornisce l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{v}$. Poichè la distanza cercata è esattamente l'altezza di tale parallelogramma, otteniamo che

$$d(r,s) = \frac{|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

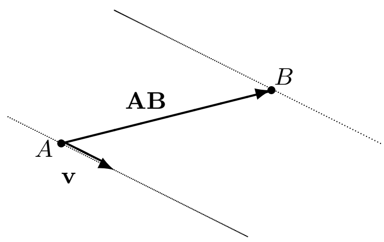

Figura 4.5. Distanza tra rette parallele

Problema 4.12. *Calcola la distanza tra le rette r e s di equazioni parametriche (rispettivamente):*

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad s : \begin{cases} x = 5 + 3h \\ y = 2 + h \\ z = -h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

Soluzione. La retta r passa per il punto $A(2,-1,5)$ mentre la retta s passa per il punto $B(5,2,0)$, e le due rette sono parallele perchè hanno lo stesso vettore direttore $\mathbf{v}(3,1,-1)$. Osserviamo che il vettore $\mathbf{AB}(3,3,-5)$ non è proporzionale al vettore direttore $\mathbf{v}(3,1,-1)$ e dunque le due rette sono distinte e hanno distanza non nulla tra loro. Il vettore $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v}(2,-12,-6)$ ha lunghezza $\sqrt{184}$, mentre $\mathbf{v}$ ha lunghezza $\sqrt{43}$. La distanza tra le due rette è dunque $d(r,s) = \frac{\sqrt{184}}{\sqrt{43}}$.

Problema 4.13. Distanza tra due rette sghembe *Siano r e s due rette sghembe di $\mathbb{E}$ di dimensione 3. Supponiamo che r abbia vettore direttore $\mathbf{v}(l, m, n)$ e passi per il punto $A(a_1, a_2, a_3)$, mentre s abbia vettore direttore $\mathbf{v}'(l', m', n')$ e passi per il punto $B(b_1, b_2, b_3)$.*
a) Mostra che la distanza tra r e s coincide con

$$d(r, s) = \frac{|\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')|}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'|}$$

b) Mostra che esiste un solo piano α contenente s e parallelo a r. La distanza tra r e s coincide con la distanza di un qualsiasi punto P di r da α.

Soluzione. a) Poichè le rette sono sghembe, lo scalare $\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')$ è non nullo, e il suo valore assoluto coincide con il volume del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{AB}$. La distanza tra le due rette r e s è esattamente l'altezza di tale parallelepipedo rispetto alla base di spigoli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$: la distanza può quindi essere ricavata dividendo il volume $|\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')|$ del parallelepipedo per l'area di base. Ricordando che l'area di base coincide con la lunghezza del prodotto esterno $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$, si ricava la formula cercata:

$$d(r, s) = \left| \frac{\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'|} \right|. \tag{4.67}$$

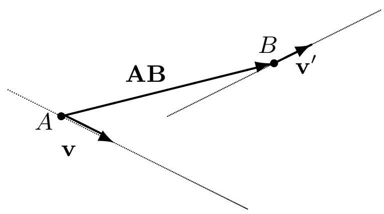

Figura 4.6. Distanza tra rette sghembe

Si osservi che, in questo modo, viene calcolata la distanza tra le due rette, senza ricavare in modo esplicito la coppia di punti che minimizza la distanza. Per ottenere tale coppia di punti, è possibile seguire il procedimento dell'Esercizio svolto 4.7 individuando la retta incidente r e s e ortogonale ad entrambe: i punti di incidenza di tale retta con r e s, rispettivamente, sono la coppia di punti di minima distanza.
b) Poichè r e s hanno vettori direttori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ tra loro linearmente indipendenti, ogni piano parallelo sia a r che a s ha giacitura $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$: tali piani costituiscono una famiglia di piani paralleli, e in particolare è unico il piano per s parallelo a r: è il piano $B+ < \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$, che chiamiamo α. Poichè $s \subset \alpha$, la distanza di r da s è maggiore o uguale alla distanza tra r e α: $d(r, s) \leq d(r, \alpha)$.

D'altra parte, poichè r è parallela ad α, tutti i punti di r hanno la stessa distanza da α; dunque $d(r, \alpha) = d(A, \alpha)$. Ma $d(A, \alpha)$ è la distanza tra A e la sua proiezione ortogonale A_α, cioè l'intersezione tra α e la retta per A ortogonale a α: ma tale intersezione è contenuta in s (come si vede dall'Esercizio svolto 4.7.

Problema 4.14. *Calcola la distanza tra le rette r e s di equazioni parametriche (rispettivamente):*

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad s : \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 3h \\ z = -2h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

Soluzione. La retta r passa per il punto $A(3, 1, 4)$ e ha vettore direttore $\mathbf{v}(2, 1, -1)$, mentre la retta s passa per il punto $B(1, 0, 0)$ e ha vettore direttore $\mathbf{v}'(1, 3, -2)$. Il prodotto esterno $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$ ha componenti $(1, 3, 5)$ e lunghezza $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'| = \sqrt{35}$. Osserviamo che il vettore $\mathbf{AB}(-2, -1, -4)$ non è complanare con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$, perchè $\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}') = -21 \neq 0$, e dunque le due rette sono effettivamente sghembe. In base all'Esercizio svolto 4.13, la distanza tra le due rette è dunque $d(r, s) = \frac{21}{\sqrt{35}}$.