6

Quadriche proiettive

In questo capitolo verrà affrontato lo studio delle quadriche dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, delle loro principali proprietà e della loro classificazione. Ci occuperemo principalmente dei casi $n = 2$ e $n = 3$.

Da questo studio, si possono trarre informazioni utili anche qualora l'ambiente sia il seguente, indicato con

$$(\star) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} & \text{la cui complessificazione è } \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \\ \mathbb{E}^n_{\mathbb{R}} & \text{la cui complessificazione è } \mathbb{E}^n_{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Talora si utilizzerà il simbolo $\mathbb{P}^n$ quando l'asserto considerato resta valido anche nell'ambiente $(\star)$.

6.1 Quadriche proiettive

Consideriamo fissato un sistema di coordinate omogenee $[X_0, \dots, X_n]$ in $\mathbb{P}^n$.

Definizione 6.1.1. Una *quadrica* proiettiva $\mathbf{\Gamma}$ è una ipersuperficie definita da una equazione omogenea $f(X_0, \dots, X_n) = 0$ di secondo grado. Si assume che l'equazione sia reale, qualora si lavori nell'ambiente $(\star)$.

Se $n = 2$, le quadriche proiettive vengono dette *coniche*.

Spesso, nel resto del capitolo, utilizzeremo il termine quadrica omettendo l'aggettivo proiettiva.

Osservazione 6.1.2. L'equazione $f(X_0, \dots, X_n) = 0$ definisce un sottoinsieme dello spazio proiettivo perché $f(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n) = \lambda^2 f(X_0, \dots, X_n)$.
Una quadrica proiettiva individua la sua equazione di secondo grado $f(X_0, \dots, X_n) = 0$ solo a meno di multiplo per una costante non nulla.
Per comodità, scriveremo anche $f(X_0, \dots, X_n) = f(\mathbf{X})$.

Ricordando che $f(X_0, \dots, X_n)$ è un polinomio omogeneo di secondo grado, si può scrivere:

$$f(X_0, \dots, X_n) = \sum_{0 \le i \le j \le n} b_{ij}\, X_i\, X_j\,.$$

Ponendo:

$$a_{ii} = b_{ii} \qquad i = 0, \dots, n \tag{6.1}$$
$$a_{ij} = \frac{b_{ij}}{2} \qquad \text{se } i < j$$
$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{se } i > j \tag{6.2}$$

resta individuata una matrice quadrata simmetrica $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tale che

$$f(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}\, X_i X_j = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} \qquad \text{ove } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Diremo che $\mathbf{A}$ *rappresenta* la quadrica $\mathbf{\Gamma}$ di equazione $f(\mathbf{X}) = 0$ nel riferimento scelto, o che è *la matrice associata alla quadrica* $\mathbf{\Gamma}$ nel riferimento scelto. Osserviamo che, fissato il sistema di coordinate, la matrice $\mathbf{A}$ è individuata dalla quadrica solo a meno di multiplo per una costante non nulla.

Esempio 6.1.3. a) Alla conica di equazione $X_0^2 + 2X_0X_1 + 2X_1^2 - X_0X_2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$ è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

b) Alla quadrica di $\mathbb{P}^3$ di equazione $X_0^2 + X_0X_1 + X_1X_2 - X_2^2 + X_0X_2 + X_3^2 = 0$ è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Definizione 6.1.4. Sia f un polinomio omogeneo di secondo grado e sia $\mathbf{A}$ la matrice simmetrica associata a f, come sopra. Si dice *forma bilineare associata a* f e si denota con Ω_f la forma bilineare simmetrica:

$$\begin{aligned} \Omega_f : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{n+1} &\to \mathbb{K} \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\mapsto \Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^t \mathbf{A} \mathbf{X}\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Osservazione 6.1.5. La forma bilineare $\Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ è un prodotto scalare, e inoltre vale l'identità di Eulero:

$$\Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) \tag{6.7}$$

e dunque f è la forma quadratica associata a $\Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Poiché la matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica, ponendo $f_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} X_j$ $(i = 0, \dots, n)$, si ricava:

$$\mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{X}) Y_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{Y}) X_i\,. \tag{6.8}$$

Per capire come si modifica la matrice che rappresenta la quadrica $\mathbf{\Gamma}$ al variare del riferimento in $\mathbb{P}^n$, si consideri un nuovo riferimento $\mathcal{R}$', con coordinate omogenee $\mathbf{X}'$, e la corrispondente legge della trasformazione delle coordinate $\rho\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X}'$. Nel riferimento $\mathcal{R}'$, l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ sarà data da $f'(\mathbf{X}') = \mathbf{X}'^t \mathbf{B} \mathbf{X}'$, la cui forma bilineare associata è $\Omega_{f'}(\mathbf{X}', \mathbf{Y}') = \mathbf{X}'^t\, \mathbf{B}\, \mathbf{Y}'$. La relazione tra le matrici associate a $\mathbf{\Gamma}$ nei due riferimenti è data da

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^t \mathbf{A} \mathbf{M},$$

come si ricava osservando che $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}'^t\, (\mathbf{M}^t\, \mathbf{A}\, \mathbf{M})\; \mathbf{X}'$.

In particolare, la definizione di quadrica è ben posta, non dipendendo dal sistema di coordinate omogenee.

Osservazione 6.1.6. i) det $(\mathbf{M}^t \mathbf{A} \mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^2 \det \mathbf{A}$. In particolare, l'avere determinante nullo ha significato proiettivo. Inoltre, nell'ambiente $(\star)$, il segno del determinante ha significato proiettivo.
ii) Il rango della matrice associata a una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ ha significato proiettivo: esso viene detto *rango della quadrica* e denotato con il simbolo

$$\operatorname{rg} \mathbf{\Gamma} \overset{def}{=} \operatorname{rg} \mathbf{A}.$$

iii) La quadrica individua l'applicazione bilineare associata solo a meno di multiplo per una costante non nulla.

Definizione 6.1.7. Una quadrica è *degenere* se e solo se non ha rango massimo. La quadrica è *non degenere* se ha rango massimo.

Osservazione 6.1.8. **Quadriche sulla retta proiettiva** Mettiamo in evidenza la relazione tra *il determinante det* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2$ *e il discriminante* $\Delta = 4(b^2 - ac)$ *del polinomio* $f(X_0, X_1) = aX_0^2 + 2bX_0X_1 + cX_1^2$*:*

$$\Delta = -4det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Un polinomio complesso omogeneo di secondo grado in due indeterminate è necessariamente della forma:

$$\begin{aligned} f(X_0, X_1) &= (a_0X_0 - b_0X_1)(a_1X_0 - b_1X_1) = \\ &= a_0a_1X_0^2 - (a_0b_1 + a_1b_0)X_0X_1 + b_0b_1X_1^2 \end{aligned} \tag{6.9}$$

la cui matrice associata è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0a_1 & -\frac{a_0b_1+a_1b_0}{2} \\ -\frac{a_0b_1+a_1b_0}{2} & b_0b_1 \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Il determinante di $\mathbf{A}$ è dato da

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_0a_1b_0b_1 - \frac{(a_0b_1 + a_1b_0)^2}{4} = \\ &= -\frac{(a_0b_1)^2}{4} - \frac{(a_1b_0)^2}{4} + \frac{2a_0a_1b_0b_1}{4} = \\ &= -\frac{(a_1b_0 - a_0b_1)^2}{4} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad [b_0, a_0] = [b_1, a_1] \end{aligned} \tag{6.12}$$

In altre parole, *ogni quadrica sulla retta proiettiva è composta da 2 punti* $P_0[b_0, a_0]$, $P_1[b_1, a_1]$ *(eventualmente coincidenti).* Inoltre, *det* $\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow$ *la quadrica di equazione* $f = 0$ *è composta da un unico punto, e diciamo che esso compare con molteplicità 2 (o che ha molteplicità 2).* L'esempio precedente mostra che, due polinomi omogenei di secondo grado f e g definiscono la stessa quadrica in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow f$ e g sono proporzionali con costante di porporzionalità non nulla. È possibile provare un analogo risultato anche per $n > 1$ in modo diretto, senza ricorrere al teorema degli zeri.

6.2 Quadriche proiettive riducibili

Definizione 6.2.1. Una quadrica proiettiva $\mathbf{\Gamma}$ di equazione $f(\mathbf{X}) = 0$ si dice *riducibile* se il polinomio f può essere scritto come prodotto $f = gh$ di fattori di grado 1 (che sono automaticamente omogenei).

Per l'Osservazione 6.1.8, una quadrica di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è sempre riducibile.

Se una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ di equazione $f(\mathbf{X}) = 0$ è riducibile, e $f = gh$ è una decomposizione, le equazioni $g = 0$ e $h = 0$ definiscono due iperpiani $\mathbb{H}_g$ e $\mathbb{H}_h$. Diciamo che $\mathbb{H}_g$ e $\mathbb{H}_h$ sono le *componenti irriducibili* di $\mathbf{\Gamma}$ e scriviamo $\Gamma = \mathbb{H}_g + \mathbb{H}_h$. Se, inoltre, $\mathbb{H}_g = \mathbb{H}_h$, cioè f è il quadrato di un polinomio omogeneo di primo grado, allora diciamo che *la componente* $\mathbb{H}_g (= \mathbb{H}_h)$ ha *molteplicità due* in $\mathbf{\Gamma}$ e scriviamo $\mathbf{\Gamma} = 2\mathbb{H}_g$.

Per $n = 2$, un iperpiano è una retta e le componenti di una conica riducibile sono rette.

Lemma 6.2.2. *Ogni conica riducibile* $\mathbf{\Gamma}$ *di* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *è degenere. Più precisamente, ogni conica riducibile* $\mathbf{\Gamma}$ *ha* $\operatorname{rg}\mathbf{\Gamma} \leq 2$ *e*

a) se $\mathbf{\Gamma}$ *è composta da una retta con molteplicità 2, allora* $\operatorname{rg}\mathbf{\Gamma} = 1$.

b) se $\mathbf{\Gamma}$ *è composta da due rette distinte, allora* $\operatorname{rg}\mathbf{\Gamma} = 2$.

Dimostrazione. Se $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile, è della forma $\mathbf{\Gamma} = r_1 + r_2$ per opportune rette r_1 e r_2. E' sempre possibile fissare un sistema di riferimento in cui r_1 abbia equazione $X_0 = 0$. Sia $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ una equazione di r_2 in tale riferimento.

La conica $\mathbf{\Gamma}$ ha dunque equazione $a_0X_0^2 + a_1X_0X_1 + a_2X_0X_2 = 0$ e la matrice associata è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

Osservando la matrice, si vede che $\operatorname{rg}\mathbf{A} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \\ 2 \Leftrightarrow r_1 \neq r_2 \end{cases}$ e, in particolare, il rango è sempre minore o uguale a 2.

□

Una dimostrazione analoga permette non solo di dimostrare il precedente risultato in dimensione maggiore, ma anche di rafforzarlo dimostrando il viceversa. Ritroveremo questa seconda parte del risultato anche attraverso una differente dimostrazione nel seguito.

Lemma 6.2.3. *Ogni quadrica riducibile* $\mathbf{\Gamma}$ *di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *(con* $n \geq 1$*) è degenere. In particolare* $\operatorname{rg}\mathbf{\Gamma} \leq 2$. *Più precisamente,*

a) $\mathbf{\Gamma}$ *è composta da un iperpiano contato con molteplicità 2, se e solo se* $\operatorname{rg}\mathbf{\Gamma} = 1$.

b) $\mathbf{\Gamma}$ *è composta da due iperpiani distinti, se e solo se* $\operatorname{rg}\mathbf{\Gamma} = 2$.

Inoltre, $\mathbf{\Gamma}$ *è riducibile se e solo se contiene un iperpiano.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$): Se $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile, è della forma $\mathbf{\Gamma} = \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2$ per opportuni iperpiani $\mathbb{H}_1$ e $\mathbb{H}_2$. E' sempre possibile fissare un sistema di riferimento in cui $\mathbb{H}_1$ abbia equazione $X_0 = 0$. Sia $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = 0$ una equazione di $\mathbb{H}_2$ in tale riferimento.

La quadrica $\mathbf{\Gamma}$ ha dunque equazione $a_0X_0^2 + a_1X_0X_1 + a_2X_0X_2 + \ldots + a_nX_0X_n = 0$ e la matrice associata è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & \ldots & \frac{a_n}{2} \\ \frac{a_1}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_n}{2} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

Osservando la matrice, si vede che $\operatorname{rg}\mathbf{A} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2 \\ 2 \Leftrightarrow \mathbb{H}_1 \neq \mathbb{H}_2 \end{cases}$ e, in particolare, il rango è sempre minore o uguale a 2.

$\Leftarrow$): Supponiamo che rg $\mathbf{A} \leq 2$, e ricordiamo che la matrice $\mathbf{A}$ è non nulla per ipotesi. Sia $S = \{\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sistema di vettori linearmente indipendenti tali che $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = 0 \; \forall\, i = 2, \ldots n$. Si completi S ad una base $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n$ di $\mathbb{C}^{n+1}$ e si consideri un riferimento che ha $[\mathbf{v}_0], \ldots, [\mathbf{v}_n]$ come punti fondamentali. Se $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{X}'$ descrive il cambiamento di coordinate, la matrice $\mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B}$ di $\mathbf{\Gamma}$ nel nuovo sistema è della forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & \ldots & 0 \\ b & d & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Dunque, nel nuovo sistema, $\mathbf{\Gamma}$ è il luogo degli zeri di un polinomio non nullo omogeneo di secondo grado in due variabili, che necessariamente si fattorizza propriamente. Dunque $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile. Per quanto prima osservato, $\mathbf{\Gamma}$ si decompone come somma di due iperpiani distinti quando rg$\mathbf{A} = 2$, mentre è un iperpiano con molteplicità 2 se rg$\mathbf{A} = 1$. □

6.3 Punti doppi e quadriche proiettive degeneri

Fissato un riferimento di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, sia $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ l'equazione di una quadrica proiettiva $\mathbf{\Gamma}$ e sia $\Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}$ la forma bilineare associata.

Una retta r di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è individuata da due suoi punti distinti $P[\mathbf{p}]$, $Q[\mathbf{q}]$ ed ogni suo punto X ha coordinate della forma $X[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}]$. L'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ ed r è definita dall'equazione:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) = f(\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}) &= (\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q})^t\mathbf{A}(\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}) = \\ &= \lambda^2 f(\mathbf{p}) + 2\lambda\mu\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mu^2 f(\mathbf{q}) = 0 \end{aligned}$$

(da interpretare come equazione nei parametri $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ della retta r) il cui discriminante è dato da:

$$\Delta = \Omega_f^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{p})f(\mathbf{q})\,. \tag{6.16}$$

Osservazione 6.3.1. a) $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow$ l'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e r è composta da due punti distinti A_1 e A_2: in tal caso, diciamo che la *molteplicità di intersezione in A_i tra la retta r e la quadrica $\mathbf{\Gamma}$* è 1 ($i = 1, 2$).
b) $\Delta = 0$ e sono nulli tutti i coefficienti $f(\mathbf{p}), f(\mathbf{q}), \Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ dell'equazione $\Leftrightarrow$ la retta r è interamente contenuta in $\mathbf{\Gamma}$.
c) $\Delta = 0$ e l'equazione (6.16) non è identicamente nulla $\Leftrightarrow$ l'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e r è composta da un'unico punto A: diciamo che la *molteplicità di intersezione* in A tra la retta e la quadrica è 2.

Si trova dunque il

Teorema 6.3.2. Teorema di Bézout *In $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, siano assegnati una retta r e una quadrica $\mathbf{\Gamma}$. Se $r \not\subset \mathbf{\Gamma}$, allora l'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e r è composta da due punti, da contare con molteplicità pari alla molteplicità di intersezione.*

Corollario 6.3.3. *a) Una retta e una quadrica di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ si intersecano sempre in almeno un punto.*
b) Ogni quadrica di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, con $n \geq 2$, ha infiniti punti.

Esempio 6.3.4. Sia $\mathbf{\Gamma}$ la conica di equazione $X_0^2 + X_2^2 + X_0X_1 + 2X_0X_2 + X_1X_2 = 0$; siano r la retta di equazione $X_0 = 0$, s la retta di equazione $2X_0 + X_1 + 2X_2 = 0$, t la retta di equazione $X_0 + X_2 = 0$.
L'intersezione tra $\mathbf{\Gamma}$ e r è regolata dal sistema

$$X_0 = 0,\ X_0^2 + X_2^2 + X_0X_1 + 2X_0X_2 + X_1X_2$$

cioè

$$X_0 = 0,\ X_2^2 + X_1X_2 = X_2(X_2 + X_1) = 0$$

L'intersezione è data da due punti reali: $[0, 1, 0]$ e $[0, 1, -1]$.

Sostituendo $X_1 = -2X_0 - 2X_2$ nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ e procedendo in modo analogo si mostra che la retta s interseca $\mathbf{\Gamma}$ in un unico punto $[1, 0, -1]$, con molteplicità di intersezione 2.

Infine, la retta t è interamente contenuta in $\mathbf{\Gamma}$: infatti, sostituendo $X_0 = -X_2$ nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ si trova l'equazione sempre verificata $0 = 0$. □

Definizione 6.3.5. In $\mathbb{P}^n$, un punto P di una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ si dice *doppio* o *singolare* per la quadrica se, per ogni retta r che passa per P, accade che $r \subset \mathbf{\Gamma}$ oppure la retta r ha molteplicità di intersezione 2 con $\mathbf{\Gamma}$ in P. Un punto $P \in \mathbf{\Gamma}$ che non è doppio, si dice *semplice*, *liscio* o *non singolare* per Γ.

Una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ si dice *non singolare* o *liscia* se tutti i sui punti sono semplici per $\mathbf{\Gamma}$. La quadrica si dice *singolare* se ha almeno un punto doppio. L'insieme dei punti doppi di una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ si denota con

$$Sing(\mathbf{\Gamma})$$

e viene chiamato il *luogo singolare di* $\mathbf{\Gamma}$.

Come riconoscere un punto doppio? Sia $P[\mathbf{p}]$ un fissato punto di $\mathbf{\Gamma}$, cioè $f(\mathbf{p}) = 0$. Sia $Q[\mathbf{q}]$ un punto qualunque di $\mathbb{P}^n$, distinto da P. Un punto X della retta congiungente P ed Q ha coordinate della forma $X[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}]$. Come precedentemente osservato, l'intersezione della retta generata da P ed Q e la quadrica $\mathbf{\Gamma}$ è data dall'equazione (nei parametri della retta)

$$\lambda^2 f(\mathbf{p}) + 2\lambda\mu\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mu^2 f(\mathbf{q}) = 0 \tag{6.17}$$

che, ricordando che P appartiene alla quadrica, si semplifica in

$$\mu\,(2\lambda\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mu f(\mathbf{q})) = 0 \tag{6.18}$$

Poichè il punto P corrisponde alla soluzione $\mu = 0$, riusciamo a caratterizzare in modo effettivo i punti doppi, e a capire come sono disposti nella quadrica:

Proposizione 6.3.6. *a) Il punto $P = P[\mathbf{p}] \in \mathbf{\Gamma}$ è doppio per $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow \Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X})$ è identicamente nullo come polinomio in $\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{p}^t\mathbf{A} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{0}$.*
Un punto $P = P[\mathbf{p}] \in \mathbf{\Gamma}$ è semplice per $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow \Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X})$ non è identicamente nullo come polinomio in $\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{p}^t\mathbf{A} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.
b) L'insieme $Sing(\mathbf{\Gamma})$ dei punti doppi di una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ di $\mathbb{P}^n$ è vuoto oppure è un sottospazio proiettivo di dimensione $n - \operatorname{rg}(\mathbf{\Gamma})$ contenuto in $\mathbf{\Gamma}$.
In particolare, la quadrica $\mathbf{\Gamma}$ è singolare se e solo è degenere.

Dimostrazione. Il punto P è doppio se e solo se, per ogni punto Q, la relazione (6.18) ammette la radice $\mu = 0$ con molteplicità 2, il che avviene se e solo se $\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X}) = 0$ per ogni $\mathbf{X}$.
b) Per quanto visto, $Sing(\mathbf{\Gamma})$ è definito dalla condizione $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. □

Osservazione 6.3.7. L'i-esimo punto fondamentale $U_i[0, \ldots, 1, 0, \ldots 0]$ del sistema di riferimento è singolare per $\mathbf{\Gamma}$ $\Leftrightarrow$ la i-esima riga $\mathbf{a}_i$ di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ la i-esima colonna $\mathbf{a}^i$ di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare la variabile X_i.

Per il teorema di Bézout, se l'intersezione di una retta r con una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ contiene un punto P doppio per $\mathbf{\Gamma}$ ed un altro punto $Q \neq P$, allora la retta r è necessariamente contenuta in $\mathbf{\Gamma}$. Questo ci permetterà di trarre informazioni su come è fatta una quadrica che contiene punti doppi. Iniziamo, per semplicità, dal caso delle coniche, ritrovando quanto mostrato nel Lemma 6.2.3:

Corollario 6.3.8. *Una conica $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^2$ è non singolare se* $\mathrm{rg}\,(\mathbf{\Gamma}) = 3$.
Se, invece, una conica è singolare, si presenta uno dei seguenti casi:

i) $rg(\mathbf{\Gamma}) = 2$: $\mathbf{\Gamma}$ è composta da due rette distinte r_1 e r_2 e $Sing(\mathbf{\Gamma})$ è formato dal punto di intersezione tra r_1 e r_2. In tal caso, ogni retta che non passi per $r_1 \cap r_2$ interseca $\mathbf{\Gamma}$ in due punti distinti e diciamo che $\mathbf{\Gamma}$ è semplicemente degenere.

ii) $rg(\mathbf{\Gamma}) = 1$: $\mathbf{\Gamma}$ è composta da una retta r con molteplicità 2 e tutti i punti sono doppi: $Sing(\mathbf{\Gamma}) = r$; inoltre, ogni retta distinta da r interseca $\mathbf{\Gamma}$ in un punto doppio. Si dice che $\mathbf{\Gamma}$ è doppiamente degenere.

In particolare, una conica è singolare se e solo se contiene una retta.

Dimostrazione. i) Se $\mathbf{\Gamma}$ ha un unico punto doppio P, allora esiste almeno una retta s che non passa per P e interseca $\mathbf{\Gamma}$ in due punti distinti A_1 e A_2. Per il Teorema di Bézout, la retta r_1 per P e A_1 deve essere interamente contenuta in $\mathbf{\Gamma}$; analogamente, la retta r_2 per P e per A_2 deve essere contenuta in $\mathbf{\Gamma}$, che risulta quindi essere l'unione di r_1 e r_2. A posteriori, si osserva che una qualunque retta che non passa per P interseca $\mathbf{\Gamma}$ in due punti distinti.
iii) Se $\mathbf{\Gamma}$ ha una retta r di punti doppi, sia $P \notin r$ e sia s una retta per P; la retta s interseca r in un punto con molteplicità 2: dunque $s \cap \mathbf{\Gamma} = s \cap r$ e, in particolare, $P \notin \mathbf{\Gamma}$. Facendo variare il punto $P \notin \mathbf{\Gamma}$, si deduce che $\mathbf{\Gamma} = 2r$. □

E ora l'analogo in dimensione maggiore. Osserviamo che, se un sottospazio proiettivo $\mathbb{S}$ non è contenuto in una quadrica $\mathbf{\Gamma}$, la restrizione dell'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ ai punti di $\mathbb{S}$ definisce una quadrica su $\mathbb{S}$, che prende il nome di *quadrica intersezione* e viene denotata con il simbolo $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$. La proposizione chiarisce che le quadriche degeneri si ottengono da quadriche non singolari contenute in sottospazi di dimensione inferiore:

Proposizione 6.3.9. *Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva singolare di $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 2)$ di rango $r > 1$ e sia $\mathbb{S}$ un sottospazio di dimensione $r - 1$ sghembo con $Sing(\mathbf{\Gamma})$. Allora:*

a) la quadrica intersezione $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}} = \mathbf{\Gamma} \cap \mathbb{S}$ è non degenere;

b) $\mathbf{\Gamma} = \cup_{P \in \mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}}(P \vee Sing(\mathbf{\Gamma}))$ è unione delle rette che contengono un punto di $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$ e un punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$.

Dimostrazione. È possibile scegliere i punti fondamentali $P_0, \ldots P_n$ del riferimento in modo che $\mathbb{S} = P_0 \vee \ldots \vee P_r$ e $Sing(\mathbf{\Gamma}) = P_{r+1} \vee \ldots \vee P_n$. L'equazione $f(X_0, \ldots, X_n) = 0$ di $\mathbf{\Gamma}$ in tale riferimento non dipende dalle variabili $X_{r+1}, \ldots, X_n$ e l'equazione di $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$ è $f = 0$ pensata come equazione nelle sole variabili $X_0, \ldots, X_r$ (che risulta essere una equazione non nulla). Se $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$ fosse degenere, si potrebbe scegliere $P_0 \in Sing(\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}})$ e in tal caso f non dipenderebbe nemmeno da X_0; ma allora, $P_0 \in Sing(\mathbf{\Gamma})$, che è assurdo. Ciò prova l'asserto a).

L'asserto b) si dimostra osservando che ogni retta congiungente un punto di $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$ e un punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$ deve essere interamente contenuta in $\mathbf{\Gamma}$, per il Teorema di Bézout. □

Esempio 6.3.10. Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica di $\mathbb{P}^3$ di rango r.

i) $r = 3$: $Sing(\mathbf{\Gamma})$ è un punto V e $\mathbf{\Gamma}$ è il *cono* di *vertice* V e *direttrice* una conica non singolare contenuta in un piano non passante per V.
ii) $r = 2$: $\mathbf{\Gamma}$ è composta da due iperpiani distinti $\mathbb{H}_1$ e $\mathbb{H}_2$ con molteplicità 1, $Sing(\mathbf{\Gamma})$ la retta intersezione tra $\mathbb{H}_1$ e $\mathbb{H}_2$, $\mathbb{S}$ è una retta sghemba con $Sing(\mathbf{\Gamma})$ e $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$ una coppia di punti distinti in $\mathbb{S}$. Si dice che $\mathbf{\Gamma}$ è *doppiamente degenere.*
iii) $r = 1$: $\mathbf{\Gamma}$ è composta da un iperpiano $\mathbb{H}$ con molteplicità 2, $Sing(\mathbf{\Gamma}) = \mathbb{H}$. Si dice che $\mathbf{\Gamma}$ è *triplamente degenere.*

6.4 Punti semplici e rette tangenti

Torniamo ora a studiare i punti semplici di una quadrica proiettiva $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^n$:

Definizione 6.4.1. Una retta r è *tangente* alla quadrica $\mathbf{\Gamma}$ in un punto semplice $P \in \mathbf{\Gamma}$ se contiene P e vale una delle seguenti
i) ha molteplicità di intersezione 2 con $\mathbf{\Gamma}$ in P,
ii) $r \subset \mathbf{\Gamma}$.

Se una retta r non è contenuta in $\mathbf{\Gamma}$ ma è tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in un punto semplice P, allora l'intersezione tra r e $\mathbf{\Gamma}$ è la quadrica singolare su r formata dal punto P con molteplicità 2.

Teorema 6.4.2. *Sia $P = P[\mathbf{p}] \in \mathbf{\Gamma}$ un punto semplice. Allora il luogo formato da P e dall'insieme dei punti $Q = Q[\mathbf{X}] \in \mathbb{P}^n$ tali che la retta r per P e Q sia tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P è un iperpiano (detto* iperpiano tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P*) definito dall'equazione:*

$$\begin{aligned} \Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X}) = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{p}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{p} = 0 \end{aligned}$$

Dimostrazione. Segue dalla equazione (6.18) e dalla discussione ad essa precedente. □

Corollario 6.4.3. *Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva. Allora:*
a) Ogni iperpiano tangente a $\mathbf{\Gamma}$ contiene $Sing(\mathbf{\Gamma})$.
b) Un iperpiano $\mathbb{H}$ tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in un suo punto semplice è interamente contenuto in $\mathbf{\Gamma}$ se e solo se $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile e $\mathbb{H}$ è uno dei due iperpiani che la compongono.
c) Se la quadrica $\mathbf{\Gamma}$ è irriducibile, un iperpiano $\mathbb{H}$ è tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in un punto semplice P se e solo se la quadrica intersezione tra $\mathbb{H}$ e $\mathbf{\Gamma}$ è singolare in P.

Definizione 6.4.4. Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva irriducibile e sia P un suo punto semplice. Si indichino con $\mathbf{\Gamma}_P$ la *quadrica intersezione* tra $\mathbf{\Gamma}$ e l'iperpiano tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in $P \in \mathbf{\Gamma}$ e con $\sigma_P =$ dim $Sing(\mathbf{\Gamma}_P)$ la dimensione del luogo singolare di tale quadrica intersezione.
Il punto P si dice *parabolico* $\Leftrightarrow$ $\sigma_P > 0$.
Il punto P si dice *h-parabolico* $\Leftrightarrow$ $\sigma_P = h$ con $h \geq 1$.

Esempio 6.4.5. a) Se $n = 1$, sia $P = P[\mathbf{p}] \in \mathbf{\Gamma}$ un punto semplice di una quadrica $\mathbf{\Gamma}$. L'unica retta contenuta in $\mathbb{P}^1$ è l'intero $\mathbb{P}^1$ e l'iperpiano tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P coincide esattamente con il punto P.

b) Se $n = 2$, sia $P = P[\mathbf{p}] \in \mathbf{\Gamma}$ un punto semplice di una conica $\mathbf{\Gamma}$. Allora il luogo dei punti $Q = Q[\mathbf{X}] \in \mathbb{P}^2$ tali che la retta r per P e Q sia tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P è una retta (detta *retta tangente a* $\mathbf{\Gamma}$ *in* P) definita dall'equazione: $\mathbf{p}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$. In particolare, in un punto semplice P di $\mathbf{\Gamma}$ passa una unica retta tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P. Per esteso, l'equazione della retta tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P è:

$$0 = \mathbf{p}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = (a_{00}p_0 + a_{01}p_1 + a_{02}p_2)X_0 + (a_{01}p_1 + a_{11}p_2 + a_{12}p_3)X_1 + \\ (a_{02}p_1 + a_{12}p_2 + a_{22}p_3)X_2 = f_0(\mathbf{p})X_0 + f_1(\mathbf{p})X_1 + f_2(\mathbf{p})X_2$$

Il primo punto fondamentale del sistema $P_0[1, 0, 0]$ è semplice per $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ la prima riga di $\mathbf{A}$ non è identicamente nulla $\Leftrightarrow$ la prima colonna di $\mathbf{A}$ non è identicamente nulla $\Leftrightarrow$ l'espressione di f è lineare nella variabile X_0. In tal caso, l'annullarsi del coefficiente di X_0 definisce la retta tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in $P_0[1, 0, 0]$. Vale analogo per il secondo e il terzo punto fondamentale.

Esempio 6.4.6. **Quadriche proiettive irriducibili di $\mathbb{P}^3$ e piani tangenti** Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva di $\mathbb{P}^3$ e sia P un suo punto semplice. Si indichi con π_P il piano tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P. Si vuole studiare la sezione di $\mathbf{\Gamma}$ con π_P. Poiché per ipotesi $\mathbf{\Gamma}$ ammette un punto semplice, accade che $\pi_P \subset \mathbf{\Gamma}$ se e solo se $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile e formata da una coppia di piani distinti: in tal caso, $P \in \pi_P$ e il piano tangente π_P coincide con il piano generato da P e dal luogo singolare di $\mathbf{\Gamma}$.
Se $\mathbf{\Gamma}$ è irriducibile, resta definita la *conica intersezione* $\mathbf{\Gamma}_P$ tra $\mathbf{\Gamma}$ e il piano tangente π_P a $\mathbf{\Gamma}$ in P. Per il Corollario 6.4.3, l'intersezione $\mathbf{\Gamma}_P$ ha un punto doppio in P e dunque è formata da due rette (contate le molteplicità). Il punto semplice P per $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3$ è *parabolico* se la conica $\mathbf{\Gamma}_P$ è una retta doppia.
Mostriamo che *la quadrica irriducibile* $\mathbf{\Gamma}$ *è degenere se e solo se ammette un punto parabolico, e, in ta caso, tutti i suoi punti semplici sono parabolici.* Infatti, per quanto visto nell'Esempio 6.3.10, se la quadrica irriducibile $\mathbf{\Gamma}$ è degenere, il sottospazio Sing $(\mathbf{\Gamma})$ è formato da un punto V, il vertice; inoltre, se P è un punto semplice di $\mathbf{\Gamma}$, la quadrica $\mathbf{\Gamma}$ contiene una unica retta r passante per P: è la retta congiungente P e il vertice V. La retta r è dunque l'unica componente della conica intersezione $\mathbf{\Gamma}_P$ tra $\mathbf{\Gamma}$ e il piano tangente in P; dunque, il punto P è parabolico.
Viceversa, se il punto semplice P è parabolico e π_P è il piano tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P, allora la conica intersezione $\mathbf{\Gamma}_P$ è una retta contata con molteplicità 2 e tutte le rette in π_P la intersecano in un punto contato con molteplicità 2. Preso un punto semplice Q di $\mathbf{\Gamma}$ non contenuto in $\mathbf{\Gamma}_P$, sia α il piano generato da Q e da $\mathbf{\Gamma}_P$; l'intersezione tra α e $\mathbf{\Gamma}$ contiene $\mathbf{\Gamma}_P$ e Q e è quindi formata da una coppia di rette distinte, che si intersecano in un punto V: il punto di intersezione V deve essere singolare per $\mathbf{\Gamma}$, perchè le rette di $\mathbb{P}^3$ che hanno molteplicità di intersezione maggiore o uguale di 2 con $\mathbf{\Gamma}$ in V non sono contenute in un piano.

Se invece P è un punto semplice non parabolico per $\mathbf{\Gamma}$, la quadrica $\mathbf{\Gamma}$ è non singolare e la conica intersezione $\mathbf{\Gamma}_P$ (tra $\mathbf{\Gamma}$ e il piano tangente π_P a $\mathbf{\Gamma}$ in P) è formata da una coppia di rette distinte.
Caso reale Nel caso reale, assumiamo che $\mathbf{\Gamma}$ sia reale e che P sia un punto reale. Si definisca:
Un punto reale $P \in \mathbf{\Gamma}$ si dice *iperbolico* se $\mathbf{\Gamma}_P$ è composta da due rette reali distinte.
Un punto reale $P \in \mathbf{\Gamma}$ si dice *ellittico* se $\mathbf{\Gamma}_P$ è composta da due rette complesse coniugate.
Mostriamo che: *se una quadrica reale non degenere* $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3$ *ha punti reali, i suoi punti reali sono tutti iperbolici o tutti ellittici.* Supponiamo che $\mathbf{\Gamma}$ ammetta un punto reale iperbolico P: per definizione, π_P è un piano reale e $\mathbf{\Gamma}_P$ è composta da due rette reali distinte. E' sufficiente mostrare che tutti i punti reali R di $\mathbf{\Gamma}$ sono iperbolici. A questo fine, basta osservare che il piano π_R tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in un punto reale $R \neq P$ è reale ed interseca π_P lungo una retta (reale) r: se r è contenuta in Γ, allora r è componente anche di $\mathbf{\Gamma}_R$, e quindi R è iperbolico; altrimenti, $\mathbf{\Gamma}_P \cap r$ è composta da due punti reali distinti, che appartengono anche a $\mathbf{\Gamma}_R \cap r$; dunque, anche in questo caso, le rette contenute in $\mathbf{\Gamma}_R$ sono reali, perchè $\mathbf{\Gamma}_R$ contiene due punti reali distinti, e R risulta iperbolico. Dalla definizione, ricordando che una retta reale r è contenuta nel piano tangente di ogni suo punto non singolare, segue, in particolare, che *una quadrica* $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3$ *reale non degenere ha punti iperbolici se e solo se contiene rette reali.*

Definizione 6.4.7. Un sottospazio $\mathbb{S} \subset \mathbb{P}^n$ è *tangente a una quadrica* $\mathbf{\Gamma}$ in un punto semplice $P \in \mathbf{\Gamma}$ se contiene P ed è contenuto nell'iperpiano tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P.

Osservazione 6.4.8. Un sottospazio $\mathbb{S}$ passante per un punto semplice P di una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ può essere interamente contenuto in $\mathbf{\Gamma}$ o intersecarla in una quadrica $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$ di $\mathbb{S}$. Se $\mathbb{S}$ è contenuto nell'iperpiano tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in un suo punto semplice P, ogni retta di $\mathbb{S}$ passante per P interseca $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$ unicamente in P con molteplicità 2 (e P è un punto singolare per $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$), oppure è interamente contenuta in $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$.

Più in generale, un sottospazio $\mathbb{S}$ è tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P se e solo se $\mathbb{S} \subset \mathbf{\Gamma}$ oppure l'intersezione $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$ ha un punto doppio in P.
Per $n \geq 3$, siano P un punto semplice di una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbb{H}$ un iperpiano passante per P. L'iperpiano $\mathbb{H}$ è tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P se e solo se $\mathbb{H} \subset \mathbf{\Gamma}$ (e, in tal caso, $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile) oppure l'intersezione $\mathbb{H} \cap \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_{\mathbb{H}}$ è una quadrica su $\mathbb{H}$ con un punto doppio in P.

6.5 Polarità

Sia $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^n$ una quadrica proiettiva, di equazione $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ (con $\mathbf{A}$ simmetrica) in un riferimento $\mathcal{R}$ fissato.

Definizione 6.5.1. Sia $P = P[\mathbf{p}]$ un punto non singolare di $\mathbf{\Gamma}$. L'*iperpiano polare di P rispetto a $\mathbf{\Gamma}$* è l'iperpiano, denotato con π_P, di equazione:

$$\mathbf{p}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0. \tag{6.19}$$

Il punto P è il *polo* dell'iperpiano π_P.

La definizione di iperpiano polare è ben posta: il luogo π_P è effettivamente un iperpiano e non dipende dalla scelta del riferimento né del vettore delle coordinate proiettive di P.

Proposizione 6.5.2. *Siano $P, P' \in \mathbf{\Gamma}$ punti non singolari di $\mathbf{\Gamma}$. Valgono allora le seguenti proprietà:*

a) appartenenza: *$P \in \pi_P \Leftrightarrow P \in \mathbf{\Gamma}$ e π_P è l'iperpiano tangente;*
b) reciprocità: *$P \in \pi_{P'} \Leftrightarrow P' \in \pi_P$; in tal caso, diciamo che i punto P e P' sono* coniugati *rispetto a $\mathbf{\Gamma}$;*
c) sezione: *$\mathbb{S}$ è un sottospazio e $P \in \mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}} \setminus Sing(\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}) \Rightarrow \pi_P \not\supset \mathbb{S}$ (cioè $\mathbb{S}$ non è tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P) e $\pi_P \cap \mathbb{S}$ è l'iperpiano polare di P rispetto a $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$.*

Dimostrazione. a) L'asserto segue dal Teorema 6.4.2.
b) L'asserto segue dalla simmetria della matrice $\mathbf{A}$.
c) E' possibile supporre che il riferimento sia scelto in modo tale che le equazioni di $\mathbb{S}$ siano $X_{h+1} = \ldots = X_n = 0$. Se $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ è l'equazione di $\mathbf{\Gamma}$ nel riferimento, la quadrica intersezione $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$ ha equazione $f(X_0, \ldots, X_h, 0 \ldots, 0) = 0$ in $\mathbb{S}$ e la matrice $\mathbf{A}$ si scrive come matrice a blocchi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

con $\mathbf{A}_1$ matrice quadrata di ordine $h+1$, di modo che $\mathbf{A}_1$ risulta essere la matrice associata a $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$:

$$f(X_0, \ldots, X_h, 0, \ldots, 0) = (X_0, \ldots, X_h)\mathbf{A}_1(X_0, \ldots, X_h)^t = 0.$$

Il punto P, che appartiene a $\mathbb{S}$, ha coordinate della forma $P(p_0, \ldots, p_h, 0, \ldots, 0)$ e l'equazione del suo iperpiano polare π_P è data da:

$$(p_0, \ldots, p_h)(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(X_0, \ldots, X_h, X_{h+1}, \ldots, X_n)^t = 0.$$

Nelle coordinate di $\mathbb{S}$, l'intersezione di π_P con $\mathbb{S}$ ha dunque equazione:

$$(p_0, \ldots, p_h)\mathbf{A}_1(X_0, \ldots, X_h) = 0$$

che è anche l'equazione dell'iperpiano polare di P rispetto a $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$: infatti, tale equazione non è identicamente nulla, perché altrimenti avremmo $(p_0, \ldots, p_h)\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$ e P sarebbe singolare per $\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{S}}$. $\square$

Una quadrica $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^n$ definisce, per quanto visto, una applicazione:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{\Gamma}} : \mathbb{P}^n \setminus Sing(\mathbf{\Gamma}) &\to \mathbb{P}^{n\vee} \\ P &\mapsto \pi_P \end{aligned} \tag{6.21}$$

È facile mostrare la seguente:

Proposizione 6.5.3. *Sia* $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^n$ *una quadrica di equazione* $\mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ *in un riferimento. Se* $Sing(\mathbf{\Gamma}) = \emptyset$*, allora l'applicazione:*

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{\Gamma}} : \mathbb{P}^n &\to \mathbb{P}^{n\vee} \\ P &\mapsto \pi_P \end{aligned} \tag{6.22}$$

è una proiettività, di matrice $\mathbf{A}$*. In particolare,* $\omega_{\mathbf{\Gamma}}$ *manda sottospazi in sistemi lineari della stessa dimensione.*

Per alcune proprietà di $\omega_{\mathbf{\Gamma}}$, si rimanda agli Esercizi svolti 6.12-6.13.

Nel resto del paragrafo, studieremo con maggiori dettagli la polarità nei casi di dimensione più bassa.

Polarità nella retta rispetto ad una quadrica

Nella retta proiettiva $\mathbb{P}^1$ sia fissato un riferimento. Fissiamo una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere $\mathbf{\Gamma}$ di $\mathbb{P}^1$, composta da due punti distinti B_0 e B_1. Denotiamo con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ la matrice associata alla quadrica $\mathbf{\Gamma}$ nel riferimento fissato. Se $P[p_0, p_1]$ è un punto di $\mathbb{P}^1$, l'equazione

$$(p_0, p_1)\mathbf{A}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = (p_0a + p_1b)X_0 + (p_0b + p_1c)X_1 = 0$$

definisce un iperpiano in $\mathbb{P}^1$, cioè il punto $[p_0b + p_1c, -(p_0a + p_1b)]$, denotato con

$$\pi_P \text{ o più semplicemente } P'$$

e detto *punto polare di P rispetto a γ*.
Cerchiamo ora il punto polare di π_P: esso è definito dall'equazione:

$$\begin{aligned} &(p_0b + p_1c, -(p_0a + p_1b))\mathbf{A}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \\ &\{a(p_0b + p_1c) - b(p_0a + p_1b)\}X_0 + \{b(p_0b + p_1c) - c(p_0a + p_1b)\}X_1 = \\ &\{p_1(ac - b^2)\}X_0 + \{p_0(b^2 - ca)\}X_1 = (ac - b^2)\{p_1X_0 - p_0X_1\} = 0. \end{aligned}$$

Ricaviamo che il punto polare di $\pi_P = P'$ è proprio il punto P. Diciamo che i punti P e π_P sono *tra loro coniugati rispetto a $\mathbf{\Gamma}$*, o che l'uno è il coniugato dell'altro.

Definizione 6.5.4. La proiettività:

$$\begin{array}{rcl} \omega_{\mathbf{\Gamma}} : \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^{1\vee} \\ P & \mapsto & \pi_P = P' \end{array} \tag{6.23}$$

è detta la *polarità rispetto a* $\mathbf{\Gamma}$.

Per quanto visto, la proiettività $\omega_{\mathbf{\Gamma}}$ è una *involuzione*, cioè $\omega_{\mathbf{\Gamma}}$ non è l'identità, ma $\omega_{\mathbf{\Gamma}}^2$ è l'identità; gli unici punti fissi per $\omega_{\mathbf{\Gamma}}$ sono i punti B_0, B_1 di $\mathbf{\Gamma}$. Se $P \neq B_0, B_1$, i punti P e P' si dicono *coniugati armonici* rispetto ad B_0 e B_1, e la nomenclatura è giustificata dalla seguente:

Proposizione 6.5.5. *Sia* $\mathbf{\Gamma} = B_0 + B_1$ *una quadrica non degenere in* $\mathbb{P}^1$. *Sia* P *un punto non appartenente a* $\mathbf{\Gamma}$, *e sia* P' *il suo punto coniugato. La quaterna* B_0, B_1, P, P' *è armonica, cioè ha birapporto*

$$(B_0\, B_1\, P\, P') = [1, -1].$$

Dimostrazione. Scegliendo opportunamente il riferimento, si può supporre che $\mathbf{\Gamma}$ sia composta dai punti fondamentali $B_0 = P_0 = [1, 0]$ e $B_1 = P_1 = [0, 1]$. L'equazione della quadrica è dunque $X_0X_1 = 0$ e la matrice associata è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il coniugato P' del punto $P = [1, p]$ ha equazione

$$(1, p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = pX_0 + X_1 = 0$$

e dunque $P' = \omega_{\mathbf{\Gamma}}(P)$ è il punto $P' = [1, -p]$.

Il birapporto $(B_0\, B_1\, P\, P')$ è dato, per definizione, dalle coordinate omogenee del punto P' nell'unico riferimento proiettivo i cui punti fondamentali siano B_0 ed B_1, e P sia il punto unità. Risulta:

$$(B_0\, B_1\, P\, P') = \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -p \end{vmatrix} \right] = [p, -p] = [1, -1].$$

□

Osservazione 6.5.6. **Polarità sulla retta rispetto ad una quadrica degenere** Una quadrica degenere $\mathbf{\Gamma}$ di $\mathbb{P}^1$ è composta da un punto A contato con molteplicità 2: $\mathbf{\Gamma} = 2A$. In particolare, A coincide con il luogo singolare di $\mathbf{\Gamma}$ e la polarità rispetto a $\mathbf{\Gamma}$ è l'applicazione costante:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 \setminus \{A\} & \to & A \\ P & \mapsto & A. \end{array}$$

Esempio 6.5.7. **Polarità indotta da una quadrica su una retta** Se $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^n$ è una quadrica proiettiva non degenere, e P un punto su una retta r non contenuta in $\mathbf{\Gamma}$, allora $P' = \pi_P \cap r$ è il punto polare di P rispetto alla quadrica intersezione $r \cap \mathbf{\Gamma}$. Il punto P' è detto *coniugato* di P rispetto all'involuzione indotta da $\mathbf{\Gamma}$ su r. Si noti che la quadrica intersezione $r \cap \mathbf{\Gamma}$ è degenere quando la retta r è tangente a $\mathbf{\Gamma}$.

Polarità rispetto ad una conica

Sia $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^2$ una conica proiettiva, di equazione $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ in un riferimento $\mathcal{R}$. Sia $P = P[\mathbf{p}]$ un punto non singolare di $\mathbf{\Gamma}$. La *retta polare di* P *rispetto a* $\mathbf{\Gamma}$ è una retta, denotata con r_P o con π_P, di equazione:

$$\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X}) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \mathbf{p}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0. \tag{6.24}$$

Il punto P è il *polo* della retta r_P.

Per la Proposizione 6.5.2, se i punti $P, P' \in \mathbb{P}^2$ non sono punti doppi di $\mathbf{\Gamma}$, si ha che

a) appartenenza: $P \in r_P \Leftrightarrow P \in \mathbf{\Gamma}$ e r_P è la retta tangente;
b) reciprocità: $P \in r_{P'} \Leftrightarrow P' \in r_P$.
c) sezione: sia r una retta che interseca $\mathbf{\Gamma}$ in due punti distinti. Se $P \in r$ e $P \notin \mathbf{\Gamma}$, allora $r_P \neq r$ e $r_P \cap r$ è il punto coniugato di P rispetto a $\mathbf{\Gamma}_r = \mathbf{\Gamma} \cap r$.

e la proiettività:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{\Gamma}} : \mathbb{P}^2 \setminus Sing(\mathbf{\Gamma}) &\to \mathbb{P}^{2\vee} \\ P &\mapsto r_P \end{aligned} \tag{6.25}$$

è detta *polarità rispetto alla conica* $\mathbf{\Gamma}$.

Proposizione 6.5.8. *Sia* $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^2$ *una conica di equazione* $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ *in un riferimento. Se* $Sing(\mathbf{\Gamma}) = \emptyset$*, allora l'applicazione:*

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{\Gamma}} : \mathbb{P}^2 &\to \mathbb{P}^{2\vee} \\ P &\mapsto r_P \end{aligned} \tag{6.26}$$

è una proiettività (di matrice $\mathbf{A}$*). In particolare, ogni retta* r *di* $\mathbb{P}^2$ *è la polare di un punto, che viene detto il suo* polo. *Inoltre, l'immagine di una retta* r *di* $\mathbb{P}^2$ *tramite* $\omega_{\mathbf{\Gamma}}$ *è una retta in* $\mathbb{P}^{2\vee}$ *(che può essere interpretata come un fascio di rette passante per il polo di* r*).*

Esempio 6.5.9. Sia $\mathbf{\Gamma}$ la conica di equazione $2X_2X_0 + 4X_0X_1 + X_1^2 = 0$ e sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice ad essa associata. Poichè $\mathbf{A}$ ha determinante non nullo, la conica è non degenere e tutti i suoi punti sono lisci. La polare del punto $P[p_0, p_1, p_2]$ è la retta r_P di equazione $(2p_1 + p_2)X_0 + (2p_0 + p_1)X_1 + p_0X_2 = 0$. Ad esempio, la polare di $P[2, 0, 1]$ ha equazione $X_0 + 4X_1 + 2X_2 = 0$, mentre la polare di $P_1[1, 0, 0]$ è $2X_1 + X_2 = 0$. Il polo della retta r di equazione $u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$ è il punto $P[p_0, p_1, p_2]$ tale che

$$(p_0, p_1, p_2)\mathbf{A} = \rho(u_0, u_1, u_2), \qquad \exists \rho \neq 0,$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Ad esempio, il polo della retta $3X_0 - X_2 = 0$ è il punto le cui coordinate soddisfano il sistema $2p_1 + p_2 = 3, 2p_0 + 2p_1 = 0, p_2 = -1$, cioè il punto $[-2, 2, -1]$.

Si osservi che, per determinare il polo di una retta r, è sufficiente intersecare le polari di due punti distinti di r.

Osservazione 6.5.10. **Interpretazione geometrica della retta polare** La Proposizione **??** permette di interpretare geometricamente la retta polare. Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica non degenere e sia r_P la retta polare del punto P rispetto alla conica $\mathbf{\Gamma}$. Se $P \in \mathbf{\Gamma}$, la retta r_P è la tangente a $\mathbf{\Gamma}$ in P. Se invece $P \notin \mathbf{\Gamma}$, la retta r_P non può essere tangente a $\mathbf{\Gamma}$ (altrimenti avrebbe come polo un punto di $\mathbf{\Gamma}$) e dunque interseca $\mathbf{\Gamma}$ in due punti distinti B_0 e B_1. La polare r_0 di B_0 passa per P, come anche la polare r_1 di B_1: dunque r_0 e r_1 sono rette del fascio di centro P che sono tangenti a $\mathbf{\Gamma}$. Si verifica facilmente che esse sono le uniche rette del fascio di centro P con tale proprietà. (vedi figura 6.1) Per una generalizzazione in dimensione superiore, vedi il Problema 6.14 .

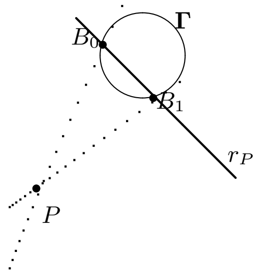

Figura 6.1. Retta polare

Osservazione 6.5.11. **Involuzione indotta dalla conica su un fascio di rette** Se la conica $\mathbf{\Gamma}$ è non degenere, siano $P \notin \mathbf{\Gamma}$ un punto non appartenente alla conica e r_P la sua retta polare. Ricordando l'Esempio 6.5.12, la polarità su r_P definita da $\mathbf{\Gamma} \cap r_P$ definisce una involuzione sul fascio di rette di centro P. Per le proprietà della polarità, tale involuzione muta una retta r per P nella retta polare π_Q del punto $Q = r \cap r_P$. In particolare, le rette per P tangenti a $\mathbf{\Gamma}$ sono fisse per tale involuzione.

Esempio 6.5.12. **Involuzione su un fascio di rette indotta dalla polarità su una retta** Nel piano proiettivo, siano assegnate una conica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere e una retta r non tangente a $\mathbf{\Gamma}$. Ad ogni punto P di r resta associato il punto coniugato P' di P rispetto alla quadrica intersezione $\gamma = \mathbf{\Gamma} \cap r$, come visto nell'esempio 6.5.7.

Sia ora $Q \in \mathbb{P}^n$ un punto non appartenente a r. La polarità su r induce una involuzione nel fascio di rette per Q e incidenti r, grazie alla seguente regola: ad ogni retta s per Q si associa la retta s' passante per Q e per il punto $P' \in r$ coniugato di $P = s \cap r$. La retta s' è detta *retta coniugata* della retta s e il punto P' è detto *coniugato* di s.

In particolare, nel piano proiettivo, data una conica non degenere $\mathbf{\Gamma}$ nel piano, e dati una retta r non tangente a $\mathbf{\Gamma}$ e un punto Q esterno a r, allora nel fascio di rette per Q resta individuata una involuzione (indotta dalla polarità su r relativa alla quadrica intersezione $r \cap \mathbf{\Gamma}$). Nel piano affine, se r è la retta impropria π_∞, diciamo che *il punto P' è la direzione coniugata della retta s*.

Osservazione 6.5.13. L'insieme delle rette tangenti ad una conica $\mathbf{\Gamma}$ individua una conica in $\mathbb{P}^{2\vee}$, detta *conica duale*.

Polarità rispetto a una quadrica in $\mathbb{P}^3$

Sia $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3$ una quadrica proiettiva, di equazione $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ in un riferimento $\mathcal{R}$. Il *piano polare di P rispetto a $\mathbf{\Gamma}$* è un piano, denotato con π_P, di equazione:

$$\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X}) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \mathbf{p}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0. \tag{6.27}$$

Il punto P è il *polo* del piano π_P.

Osservazione 6.5.14. **Caso reale** Sia $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3$ una quadrica reale non degenere a punti iperbolici. Siano $P \in \mathbf{\Gamma}$ un punto iperbolico e $\mathbf{\Gamma}_P = \mathbf{\Gamma} \cap \omega_P = r \cup r'$ la coppia di rette reali tagliate su Q dal piano tangente in P. Per ogni punto $R \in r$ distinto da P, la corrispondente conica $\mathbf{\Gamma}_R$ è composta da r e da un'altra retta reale r'_R che interseca r in R; si osservi che r' ed r'_R sono sghembe fra loro, altrimenti r, r' e r'_R risulterebbero complanari e il piano che le contiene sarebbe componente di $\mathbf{\Gamma}$, che è invece irriducibile per ipotesi. Al variare di R in r, si descrive dunque una famiglia di rette reali r'_R, a due a due sghembe tra loro e ciascuna delle quali interseca r in un punto: tale famiglia si dice *schiera di rette*. Si osservi che, dato un qualunque punto reale S di $\mathbf{\Gamma}$, esiste una ed una sola retta della schiera che passi per S: infatti, l'intersezione con $\mathbf{\Gamma}$ del piano reale generato da S e da r contiene necessariamente sia r che S e dunque è composta da r e da una retta reale per S che interseca r in un punto.

In modo analogo, al variare di R' nella retta r', si descrive una schiera di rette $r_{R'}$ con le stesse proprietà.

Dunque, *una quadrica reale non degenere $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3$ a punti iperbolici contiene due schiere di rette.*

Osservazione 6.5.15. Se $\mathbf{\Gamma}$ è una quadrica reale non degenere, una retta r si dice *secante* se $r \cap \mathbf{\Gamma}$ è composta da due punti reali distinti, e altrimenti si dice *esterna*. Se r è secante e $\mathbf{\Gamma}$ ha punti iperbolici, la retta polare r' è secante ed esistono due piani reali passanti per r e tangenti a $\mathbf{\Gamma}$: infatti, r' si ottiene in particolare intersecando gli iperpiani polari dei due punti di intersezione di r con $\mathbf{\Gamma}$.

Se r è secante e $\mathbf{\Gamma}$ ha punti ellittici, la retta polare è esterna e non esistono piani reali passanti per r e tangenti a $\mathbf{\Gamma}$.

6.6 Classificazione proiettiva delle quadriche su una retta.

Quadriche della retta proiettiva complessa Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva nella retta complessa $\mathbb{P}^1$. Se $\mathbf{\Gamma} = 2B$ è degenere, si può scegliere il riferimento in modo tale che B abbia coordinate $B[0, 1]$ e $\mathbf{\Gamma}$ abbia equazione $X_0^2 = 0$.

Se $\mathbf{\Gamma} = B_0 + B_1$ è non degenere, il riferimento può essere scelto in modo tale che B_0 e B_1 abbiano coordinate, rispettivamente, $B_0[1, i]$ e $B_1[1, -i]$, e $\mathbf{\Gamma}$ abbia equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$.

Le equazioni così determinate, si dicono *forma canonica proiettiva* per $\mathbf{\Gamma}$ e riflettono la proprietà che le forme quadratiche non degeneri su un campo algebricamente chiuso (di caratteristica diversa da 2) ammettono sempre una base ortonormale.

Quadriche reali della retta proiettiva reale o complessificata Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica reale di $\mathbb{P}^1$. Se $\mathbf{\Gamma} = 2B$ è degenere, esiste un riferimento in cui B ha coordinate $B[0, 1]$ e $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $X_0^2 = 0$, come nel caso complesso.

Se $\mathbf{\Gamma} = B_0 + B_1$ è non degenere, occorre invece distinguere il caso in cui B_0 e B_1 siano reali, dal caso in cui B_0 e B_1 siano immaginari coniugati. Se B_0 e B_1 sono reali, allora in un opportuno riferimento, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $X_0^2 - X_1^2 = 0$: riconosciamo questo caso perché la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha determinante strettamente negativo. Se invece B_0 e B_1 sono immaginari coniugati, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$ in un riferimento opportuno: riconosciamo questo caso perché la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha determinante strettamente positivo.

Osservazione 6.6.1. La distinzione dei due casi possibili per le quadriche non degeneri reali corrisponde alla distinzione, tra le forme quadratiche reali di rango 2, tra le forme definite e le forme non definite. Come verrà ricordato nel seguito (cf. 8.8.6), la matrice associata alla forma quadratica in un qualsiasi riferimento permette facilmente di operare tale distinzione.

Osservazione 6.6.2. **Determinazione della forma canonica nel caso non degenere reale a punti reali.** Siano P un punto reale di $\mathbb{P}^1$ non appartenente ad una quadrica non singolare $\mathbf{\Gamma}$, e P' il suo polare. In un sistema di riferimento in cui $P[1, 0]$ e $P'[0, 1]$, la matrice associata a $\mathbf{\Gamma}$ è della forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con a e b non nulli e $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $aX_0^2 + bX_1^2 = 0$. Nel sistema di coordinate $Y_0 = \sqrt{|a|}X_0$, $Y_1 = \sqrt{|b|}X_1$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$.

6.7 Classificazione proiettiva delle coniche

In questa sezione, si vuole capire quando una conica può essere trasformata attraverso una proiettività in un'altra conica assegnata (diciamo che le coniche sono *proiettivamente equivalenti*). In altre parole, si vuole capire se due equazioni descrivono la stessa conica in sistemi di coordinate differenti. Questo confronto verrà compiuto cercando per ciascuna conica una equazione "ottimale" (detta *equazione canonica proiettiva*): risulterà che *due coniche sono proiettivamente equivalenti se hanno la stessa equazione canonica proiettiva.* Come consueto, potremo pensare che stiamo cercando un nuovo riferimento nel quale la conica è definita da una equazione più semplice.

Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$; consideriamo una sua matrice

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{6.28}$$

Osservazione 6.7.1. **Punti fondamentali e coniche** Il primo punto fondamentale $U_0[1,0,0]$ appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ se e solo se nell'equazione f di $\mathbf{\Gamma}$ non compare il termine in X_0^2 (cioè se $a_{00}=0$).

Il primo punto fondamentale $U_0[1,0,0]$ è singolare per $\mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow$ la prima riga di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ la prima colonna di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare la variabile X_0. Vale analogo per gli altri punti fondamentali.

Una strategia affinché nella matrice della conica compaiano righe (e colonne) nulle è dunque quella di considerare riferimenti in cui sia massimo possibile il numero di punti fondamentali che siano anche punti singolari per la conica. Dunque, se il luogo singolare è una retta, potremmo posizionare su di essa due punti fondamentali (per convenzione, il secondo e il terzo punto fondamentale); se invece il luogo singolare è composto da un unico punto, lo sceglieremo come punto fondamentale (per convenzione, il terzo).

In generale, se $U_0[1,0,0]$ non è un punto doppio di $\mathbf{\Gamma}$ (potrebbe essere un punto semplice o non appartenere alla conica), allora la sua polare ha equazione $a_{33}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 = 0$, i cui coefficienti costituiscono la prima riga di $\mathbf{A}$. In particolare, il punto $U_1[0,1,0]$ appartiene alla polare di U_0 se e solo se $a_{01} = 0 \Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare il termine misto in X_0X_1. Allo stesso modo, il punto $U_2[0,0,1]$ appartiene alla polare di U_0 se e solo se $a_{02} = 0 \Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare il termine misto in X_0X_2. Ma per poter imporre che U_1 e U_2 stiano entrambi nella polare di U_0, sicuramente U_0 non può stare sulla conica: altrimenti, U_0 starebbe sulla propria polare, e i tre punti fondamentali sarebbero allineati. Vale analogo per gli altri punti fondamentali. *Una strategia per annullare nella matrice i termini fuori dalla diagonale è dunque quella di scegliere di posizionare, ove possibile, i punti fondamentali in punti ciascuno appartenente alle polari degli altri. E per poterlo fare, occorre sicuramente punti che non appartengono alla conica.*

Osservazione 6.7.2. **Classificazione proiettiva delle coniche degeneri**
a) Supponiamo che una conica $\mathbf{\Gamma}$ abbia rango 1. Se si sceglie un riferimento nel quale i punti $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$ siano entrambi doppi, l'equazione della conica diventa $Y_0^2 = 0$ (detta *equazione canonica proiettiva*) e la matrice associata ad una conica singolare assume la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.29}$$

b) Supponiamo che $\mathbf{\Gamma}$ abbia rango 2. Se si sceglie un riferimento nel quale un punto doppio abbia coordinate omogenee $[0,0,1]$, l'equazione della conica $f(X_0,X_1)=0$ dipende solo da due variabili e la matrice associata ad una conica singolare assume la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.30}$$

Se si impone anche che $P_0[1,0,0] \notin \mathbf{\Gamma}$, $P_1[0,1,0] \notin \mathbf{\Gamma}$, $P_1 \in r_{P_0}$, si vede che la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad \neq 0. \tag{6.31}$$

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, con un cambio di coordinate $Y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{a}}$, $Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{b}}$, si ricava l'*equazione canonica proiettiva* $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, se $ad > 0$ l'*equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$. Se invece $ad < 0$ l'*equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$.

Cerchiamo ora di classificare le coniche non degeneri. Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica non degenere di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Definizione 6.7.3. Un triangolo autopolare per $\mathbf{\Gamma}$ è composto da tre rette s, t, v che si intersecano a due a due in 3 punti distinti S, T, V, in modo tale che $S \notin s$, $T \notin t$, $V \notin v$ e inoltre s è la retta polare di S, t è la retta polare di T, v è la retta polare di V.

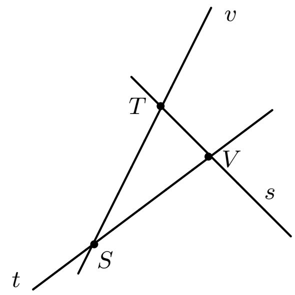

Figura 6.2. Un triangolo

Lemma 6.7.4. *Ogni conica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere ammette infiniti triangoli autopolari.*

Dimostrazione. Sia S un punto che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ e sia $T \notin \mathbf{\Gamma}$ un punto sulla retta polare s di S rispetto a $\mathbf{\Gamma}$. La retta polare t di T (contiene S e) interseca s in un punto V necessariamente distinto da T: s, t, v formano dunque un triangolo autopolare. □

Il Lemma 6.7.4 si estende al caso di una conica degenere? (cf. Problemi 6.8-6.9).

I triangoli autopolari permettono di determinare riferimenti nei quali l'equazione della conica diventa più semplice:

Osservazione 6.7.5. Si fissi un triangolo autopolare, e si scelga il sistema di riferimento in cui $S = [1, 0, 0]$, $T = [0, 1, 0]$ e $V = [0, 0, 1]$, di modo che s ha equazione $X_0 = 0$, t ha equazione $X_1 = 0$, v ha equazione $X_2 = 0$. Si vede facilmente che $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$aX_0^2 + bX_1^2 + cX_2^2 = 0 \qquad (\text{con } abc \neq 0) \tag{6.32}$$

e la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ è diagonale in questo riferimento.

Nel piano proiettivo complesso Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica non degenere di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e sia $[X_1, X_2, X_3]$ il sistema di coordinate omogenee legato ad un triangolo autopolare, come nell'Osservazione 6.7.5. Nel riferimento $Y_0 = \sqrt{a}\, X_0$, $Y_1 = \sqrt{b}\, X_1$, $Y_2 = \sqrt{c}\, X_2$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0, \tag{6.33}$$

detta *equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$.

Vale dunque la seguente proposizione:

Proposizione 6.7.6. *Due coniche sono* proiettivamente equivalenti *in* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *(cioè esiste una proiettività che muta l'una nell'altra) se e solo se hanno lo stesso rango.*

Si rimanda al Problema 8.4 per un esempio di classificazione proiettiva di coniche non degeneri.

Nel piano proiettivo reale o nel piano proiettivo reale complessificato Osserviamo che l'inclusione $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ induce una inclusione $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, perché due terne di numeri reali sono proporzionali come terne complesse se e solo se sono proporzionali su $\mathbb{R}$. In particolare, ogni riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ induce un riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$: un tale riferimento è detto *riferimento reale*. Nel resto del capitolo considereremo spesso solo riferimenti reali di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Diremo che stiamo lavorando nel *piano proiettivo reale ampliato con i punti immaginari.* I punti reali sono punti del piano che ammettono coordinate omogenee reali. Una conica è reale se ammette una equazione a coefficienti reali.

Sono ammessi solo cambi di riferimento reali. Sia $\mathbf{\Gamma}$ una conica reale non degenere di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (o del suo complessificato) e sia $[X_0, X_1, X_2]$ il sistema di coordinate omogenee legato ad un triangolo autopolare, come nell'Osservazione 6.7.5.

Il caso delle coniche reali non degeneri si discute in modo analogo al caso complesso, distinguendo due possibili casi. I coefficienti a, b e c che compaiono nell'equazione 6.32 sono reali non nulli, quindi almeno due di essi hanno lo stesso segno; eventualmente moltiplicando l'equazione per -1 e/o scambiando l'ordine delle coordinate, è possibile assumere che a e b siano positivi. Se anche c è positivo, nel riferimento $Y_0 = \sqrt{a}\, X_0$, $Y_1 = \sqrt{b}\, X_1$, $Y_2 = \sqrt{c}\, X_2$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0, \tag{6.34}$$

detta *equazione canonica proiettiva reale* di $\mathbf{\Gamma}$: la conica $\mathbf{\Gamma}$ è in tal caso priva di punti reali

Se, invece, $c < 0$, allora nel riferimento $Y_0 = \sqrt{a}\, X_0$, $Y_1 = \sqrt{b}\, X_1$, $Y_2 = \sqrt{|c|}\, X_2$, $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 0, \tag{6.35}$$

detta *equazione canonica proiettiva reale* di $\mathbf{\Gamma}$: la conica $\mathbf{\Gamma}$ ha in tal caso punti reali.

Riassumendo, *esiste sempre un riferimento nel quale l'equazione di una conica non degenere reale, nel piano proiettivo reale o complessificato, assume una (ed una sola) delle forme seguenti*:

i) $Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = 0$: *conica non degenere senza punti reali.*

ii) $Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 0$: *conica non degenere a punti reali.*

Per discutere se una conica reale non degenere sia a punti reali o ne sia priva, è utile il seguente lemma, che permette di fornire la risposta studiando i coefficienti della matrice associata alla conica in un qualsiasi riferimento:

Lemma 6.7.7. *Una conica reale non degenere è priva di punti reali se e solo se* $\begin{cases} a_{22}\, det\mathbf{A} > 0 \\ det\mathbf{A}_{00} > 0 \end{cases}$*, ove con* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *si denoti la matrice associata alla conica, con* $\mathbf{A}_{00}$ *la sottomatrice di* $\mathbf{A}$ *ottenuta togliendo la prima riga e la prima colonna.*

Dimostrazione. Se $a_{22} = 0$, la conica contiene il punto reale $[0, 0, 1]$. Possiamo dunque supporre $a_{22} \neq 0$ (e, analogamente, $a_{11} \neq 0$ e $a_{00} \neq 0$). La conica $\mathbf{\Gamma}$ è priva di punti reali se e solo se l'equazione in X_2:

$$a_{22}X_2^2 + 2(a_{12}X_1 + a_{02}X_0)X_2 + (a_{11}X_1^2 + 2a_{01}X_0X_1 + a_{00}X_0^2) = 0$$

non ha soluzione per qualunque scelta di X_0, X_1 reali non entrambi nulli. Ciò equivale a chiedere che sia sempre strettamente negativo il discriminante

$$\Delta = -4[A_{00}X_1^2 + 2A_{01}X_0X_1 + A_{11}X_0^2]$$

(ove con A_{ij} si denotia il determinante della sottomatrice $\mathbf{A}_{ij}$ di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima)). Poichè il discriminante Δ è a sua volta una equazione di secondo grado, chiedere che Δ sia sempre negativo equivale ad imporre che:

a) il coefficiente $-4A_{00}$ di X_1^2 deve essere negativo, cioè $A_{00} = det\mathbf{A}_{00} > 0$;

b) il discriminante $\Delta' = 4[A_{01}^2 - A_{00}A_{11}] = -4a_{22}det\mathbf{A}$ dell'equazione quadratica data da Δ deve essere strettamente negativo:

$$-a_{22}det\mathbf{A} < 0 \text{ cioè } a_{22}det\mathbf{A} > 0.$$

□

Si rimanda agli Esercizi Svolti 8.3-8.8 per esempi di classificazione proiettiva di coniche non degeneri nel caso reale.

6.8 Classificazione proiettiva delle quadriche in $\mathbb{P}^3$

Osservazione 6.8.1. **Classificazione proiettiva delle quadriche degeneri in** $\mathbb{P}^3$
Sia $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3$ una quadrica degenere.
a) Se $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 1, è un piano doppio. Scegliendo un riferimento nel quale i punti $[0, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 1, 0]$ e $[0, 0, 0, 1]$ siano doppi, l'equazione della quadrica diventa $Y_0^2 = 0$ (detta *equazione canonica proiettiva*).
b) Se $\mathbf{\Gamma}$ ha rango 2, la quadrica è riducibile e composta da una coppia di piani distinti. Scegliendo un riferimento nel quale un punto doppio abbia coordinate omogenee $[0, 0, 1, 0]$ e uno abbia coordinate $[0, 0, 0, 1]$, l'equazione della quadrica $f(X_0, X_1) = 0$ dipende solo da due variabili. Se si impone anche che $P_0[1, 0, 0, 0] \notin \mathbf{\Gamma}$, $P_1[0, 1, 0, 0] \notin \mathbf{\Gamma}$, $P_1 \in \pi_{P_0}$, la matrice di $\mathbf{\Gamma}$ ha forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad \neq 0. \tag{6.36}$$

In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, con un cambio di coordinate $Y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{a}}$, $Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{b}}$, si ricava l'*equazione canonica proiettiva* $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$.

In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, se $ad > 0$ l'*equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$ e $\mathbf{\Gamma}$ è composto da una coppia di piani complessi coniugati. Se invece $ad < 0$ l'*equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$ è $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$ e $\mathbf{\Gamma}$ è composto da una coppia di piani reali distinti.

Sia ora $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica non degenere di $\mathbb{P}^3$.

Definizione 6.8.2. Un *sistema autopolare* per $\mathbf{\Gamma}$ è composto da 4 piani distinti $\mathbb{H}_0$, $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$, $\mathbb{H}_3$ tali che, posto A_i il polo di $\mathbb{H}_i$ (per ogni i da 0 a 3), risulta che $A_i \notin \mathbb{H}_i$ e che A_i è l'unico punto nell'intersezione comune di tutti gli iperpiani $\mathbb{H}_a \cap \mathbb{H}_b \cap \mathbb{H}_c$ con a, b, c 0 a 3 distinti tra loro e distinti da i.

Osservazione 6.8.3. Ogni quadrica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere ammette un sistema autopolare.

Dimostrazione. Sia A_0 un punto che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ e sia $A_1 \notin \mathbf{\Gamma}$ un punto sul piano polare $\mathbb{H}_0$ di A_0. Il piano polare $\mathbb{H}_1$ di A_1 interseca $\mathbb{H}_0$ in un sottospazio $\mathbb{H}_0 \cap \mathbb{H}_1$ che non contiene A_0 e A_1. Si procede prendendo A_2 in $\mathbb{H}_0 \cap \mathbb{H}_1$ ma non in $\mathbf{\Gamma}$, indicando con $\mathbb{H}_2$ il piano polare di A_2 e ponendo $A_3 = \mathbb{H}_0 \cap \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$ (tale intersezione è necessariamente composta da un unico punto). Si verifica che i piani così individuati hanno la proprietà richiesta. □

Osservazione 6.8.4. **Classificazione proiettiva delle quadriche non degeneri** Si fissi un sistema autopolare, e si scelga il sistema di riferimento in cui $A_0 = [1, 0, 0, 0]$, $A_1 = [0, 1, 0, 0]$, $A_2 = [0, 0, 1, 0]$, $A_3 = [0, 0, 0, 1]$, di modo che $\mathbb{H}_i$ ha equazione $X_i = 0$, per $i = 0, \ldots, 3$. In tale sistema di riferimento, la quadrica $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $a_0X_0^2 + a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + a_3X_3^2 = 0$. Nel riferimento $Y_i = \frac{X_0}{\sqrt{a_i}}$ (per $i = 0, \ldots, 3$), la quadrica $\mathbf{\Gamma}$ ha dunque equazione

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 0$$

che è detta *equazione canonica proiettiva* di $\mathbf{\Gamma}$.
Caso reale. Le quadriche proiettive reali non degeneri di $\mathbb{P}^3$ ammettono, in un opportuno sistema di riferimento, una ed una sola equazione della seguente forma:
i) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ non degenere senza punti reali.
ii) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$ non degenere a punti ellittici.
iii) $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$ non degenere a punti iperbolici.

6.9 Classificazione proiettiva delle quadriche

Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica non degenere di $\mathbb{P}^n$.

Definizione 6.9.1. Un *sistema autopolare* per $\mathbf{\Gamma}$ è composto da $n + 1$ iperpiani distinti $\mathbb{H}_0$, $\mathbb{H}_1$, ..., $\mathbb{H}_n$ tali che, posto A_i il polo di $\mathbb{H}_i$ (per ogni i da 0 a n), risulta che $A_i \notin \mathbb{H}_i$ e che A_i è l'unico punto nell'intersezione di tutti gli iperpiani $\mathbb{H}_1 \cap \ldots \cap \hat{\mathbb{H}}_i \cap \ldots \cap \mathbb{H}_n$ tranne $\mathbb{H}_i$.

Per una conica, il sistema autopolare è detto *triangolo autopolare*.

Osservazione 6.9.2. Ogni quadrica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere ammette un sistema autopolare.

Dimostrazione. Sia A_0 un punto che non appartiene a $\mathbf{\Gamma}$ e sia $A_1 \notin \mathbf{\Gamma}$ un punto sull'iperpiano polare $\mathbb{H}_0$ di A_0. L'iperpiano polare $\mathbb{H}_1$ di A_1 interseca $\mathbb{H}_0$ in un sottospazio $\mathbb{H}_0 \cap \mathbb{H}_1$ che non contiene A_0 e A_1. Si procede prendendo A_3 in $\mathbb{H}_0 \cap \mathbb{H}_1$ ma non in $\mathbf{\Gamma}$, e così di seguito. □

Osservazione 6.9.3. **Classificazione proiettiva delle quadriche non degeneri** Si fissi un sistema autopolare, e si scelga il sistema di riferimento in cui $A_0 = [1, 0, \dots, 0]$, $A_1 = [0, 1, 0, \dots, 0]$, ..., $A_n = [0, 0, \dots, 0, 1]$, di modo che $\mathbb{H}_i$ ha equazione $X_i = 0$, per $i = 0, \dots, n$. Si vede facilmente che $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $a_0X_0^2 + a_1X_1^2 + \ldots + a_nX_n^2 = 0$. Nel riferimento $Y_i = \frac{X_0}{\sqrt{a_i}}$ (per $i = 0, \dots, n$), $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione $Y_0^2 + Y_1^2 + \ldots + Y_n^2 = 0$.
Caso reale. Il caso delle quadriche reali non degeneri si discute in modo analogo, distinguendo n possibili casi; ciascuno di essi, in un opportuno sistema di riferimento, ammette una equazione della seguente forma (rispettivamente):
$i)_h$ $X_0^2 + X_1^2 + \ldots + X_h^2 - X_{h+1}^2 - \ldots - X_n^2 = 0$.
La quadrica corrispondente alla scelta $h = n$ è detta quadrica non degenere senza punti reali; tutte le altre sono quadriche non degeneri a punti reali.

In modo completamente analogo agli esempi visti, si mostra il seguente Teorema, che fornisce la classificazione proiettiva delle quadriche nel caso generale, per ogni valore del rango:

Teorema 6.9.4. *Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva complessa di $\mathbb{P}^n$ di rango r. Allora esiste un sistema di riferimento in cui $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione: $X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2 = 0$. Due quadriche sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango.*

Teorema 6.9.5. Caso reale. (Teorema di Sylvester.) *Sia $\mathbf{\Gamma}$ una quadrica proiettiva reale di $\mathbb{P}^n$ di rango r. Allora esiste un sistema di riferimento in cui $\mathbf{\Gamma}$ ha equazione: $X_0^2 + \ldots + X_q^2 - X_{q+1} - \ldots - X_{r-1}^2 = 0$ e gli interi q ed r sono univocamente individuati da $\mathbf{\Gamma}$.*

La determinazione della forma canonica individuata nel teorema di Sylvester può essere facilmente ottenuta utilizzando il seguente:

Proposizione 6.9.6. (Criterio di Sylvester.) *Sia φ un prodotto scalare reale e sia $\mathbf{A}$ la matrice ad esso associata in un riferimento.*
a) φ è definito positivo se e solo se i minori principali di $\mathbf{A}$ sono tutti > 0.
b) φ è definito negativo se e solo se i minori principali di $\mathbf{A}$ di ordine dispari sono tutti < 0 e quelli di ordine pari sono tutti > 0.

Corollario 6.9.7. *Una quadrica $\mathbf{\Gamma}$ non degenere ha punti reali se e solo se il prodotto scalare ad essa associato non è definito.*